Ivica Bošnjak

O algebrama kompleksa

doktorska disertacija

Novi Sad, 2002

Sadržaj

1 Stepene konstrukcije i njihove primene **1**
1.1 Algebre kompleksa univerzalnih algebri 1
1.2 Algebre kompleksa i identiteti 6
1.3 Globalna odredjenost klasa algebri 12
1.4 Globalna odredjenost semigrupa 14
1.5 Globalna odredjenost unarnih algebri 18
1.6 Algebre kompleksa relacijskih struktura i Booleove algebre sa operatorima 21
1.7 Varijeteti algebri kompleksa 27
1.8 Stepenovanje relacija 37
1.9 Relacijske strukture kompleksa i identiteti 43

2 Uopštene faktor algebre i algebre kompleksa **49**
2.1 Faktor algebre i algebre kompleksa 49
2.2 Uopštena faktor algebra i dobre faktor relacije 53
2.3 Uredjen skup dobrih relacija 57
2.4 Proširene teoreme o izomorfizmu i kvazi-kongruencije 62
2.5 O mrežama kvazi-kongruencija 66
2.6 Stepenovanje dobrih relacija i stepene teoreme o izomorfizmu . . 73
2.7 Stepenovanje vrlo dobrih, H-dobrih i S-dobrih relacija 87

3 Grafovi i stepene konstrukcije **91**
3.1 Osnovni pojmovi i oznake 91

3.2 Stepeni grafovi 92
3.3 Globalna odredjenost grafova 95
3.4 Globalna odredjenost stabala 98
3.5 Globalna odredjenost turnira 100
3.6 Globalna odredjenost refleksivnih orijentisanih grafova 104
3.7 Turniri kao grupoidi 110

Predgovor

Ovaj rad se bavi algebrama kompleksa i stepenim konstrukcijama uopšte. Stepene konstrukcije predstavljaju pokušaj da se struktura koja postoji medju elementima datog skupa "podigne" na nivo podskupova tog skupa. U radu se razmatraju sledeće konstrukcije:

(1) Za datu operaciju na skupu A formiramo odgovarajuću stepenu operaciju na $\mathcal{P}(A)$. Na taj način svakoj algebri sa nosačem A možemo dodeliti njenu algebru kompleksa sa nosačem $\mathcal{P}(A)$.

(2) Za datu relaciju na skupu A formiramo odgovarajuću stepenu relaciju na $\mathcal{P}(A)$. To nam omogućava da svakoj relacijskoj strukturi pridružimo odgovarajuću stepenu relacijsku strukturu.

(3) Za datu relaciju na skupu A formiramo odgovarajuću operaciju na $\mathcal{P}(A)$. Na taj način svakoj relacijskoj strukturi možemo pridružiti odgovarajuću algebru kompleksa date strukture.

Prvo poglavlje ovog rada sadrži pregled poznatih rezultata iz ove oblasti. U prvom odeljku razmatra se veza algebri kompleksa sa osnovnim operatorima univerzalne algebre. U drugom odeljku dati su poznati rezultati Gautama i Grätzer-Laksera o identitetima koji se prenose sa algebre (varijeteta) na algebru kompleksa (varijetet algebri kompleksa). U sledeća tri odeljka prikazani su rezultat o globalnoj odredjenosti pojedinih klasa algebri. U šestom odeljku uvedene su algebre kompleksa relacijskih struktura. Ako u definiciju uključimo skupovno-teoretske operacije, ove algebre su Booleove algebre sa operatorima. U nastavku sekcije dokazana je teorema reprezentacije Jónssona-Tarskog za dobre Booleove algebre sa operatorima. Sedmi odeljak sadrži rezultate iz poznatog rada R. Goldblatta o varijetetima čiji se članovi mogu predstaviti kao algebre kompleksa relacijskih struktura i o vezi ovih varijeteta sa modalnim logikama. U osmom odeljku razmatrane su relacijske strukture kompleksa i ukazano je na njihovu primenu u teorijskom računarstvu. U devetom odeljku dat je dokaz teoreme Grätzer-Whitneya o varijetetima relacijsko-operacijskih struktura zatvorenim u odnosu na formiranje stepenih struktura (teorema je dokazana samo za strukture sa operacijama i relacijama konačne arnosti, dok u originalnom dokazu nema tog ograničenja).

Drugo poglavlje ima sedam odeljaka. Osim teorema 2.1-2.5 rezultati ovog poglavlja su originalni i dobijeni su u saradnji sa Rozálijom Madarász. U prvom odeljku razmatrana je veza izmedju faktor algebri i algebri kompleksa i date su stepene verzije teorema o izomorfizmu. Ključni pojam ovog odeljka, pojam dobre faktor relacije, uveden je u drugom odeljku, gde su dokazane neke osnovne osobine ovih relacija. Dobre relacije predstavljaju uopštenje kongruencija, ali za razliku od njih, skup dobrih relacija neke algebre uredjen inkluzijom biće mreža ako i samo ako su sve relacije na posmatranoj algebri dobre. Ovo tvrdjenje dokazano je u trećem odeljku. Teoreme o izomorfizmu ne mogu se proširiti sa kongruencija na klasu svih dobrih relacija. Ovo pitanje razmatrano je u četvrtom odeljku, gde su uvedene neke klase relacija (šire od klase kongruencija) za koje važe uopštene verzije teorema o izomorfizmu. U petom odeljku je pokazano da se, kada se pomenute klase urede inkluzijom, dobijaju algebarske mreže i ispitivan je medjusobni odnos tih mreža. U šestom odeljku dokazane su stepene verzije teorema o izomorfizmu, za šta je bilo potrebno uvesti nove klase dorih relacija, S-dobre, H-dobre i vrlo dobre relacije. Stepene relacije koje se ovde koriste potiču iz teorijskog računarstva, gde igraju veoma važnu ulogu u modelovanju nedeterminističkih programa. U sedmom odeljku ispitano je šta se dobije kada se stepenuju relacije iz pomenutih klasa.

U trećem poglavlju razmatrana su neka pitanja u vezi sa stepenim grafovima. Grafove možemo posmatrati kao relacijske strukture sa jednom binarnom relacijom, a stepeni grafovi su njihove relacijske strukture kompleksa. Prvi odeljak ovog poglavlja sadrži spisak osnovnih pojmova i oznaka, što je potrebno izmedju ostalog i zbog toga što terminologija iz teorije grafova na našem jeziku još nije usaglašena. U drugom odeljku dokazane su neke osnovne osobine stepenih grafova, dok su u trećem odeljku navedeni rezultati drugih autora o globalnoj odredjenosti grafova. U četvrtom, petom i šestom odeljku dokazana je globalna odredjenost nekih klasa grafova, a u sedmom odeljku globalna odredjenost klase algebri koja je dobijena algebraizacijom turnira. Svi rezultati četvrtog, petog, šestog i sedmog odeljka su originalni.

Na kraju, želim da se zahvalim svima koji su doprineli izradi ove teze. Posebnu zahvalnost dugujem mentoru dr Rozáliji Sz. Madarász koja me je upoznala sa problemima čije je rešavanje dovelo do ove teze i ukazala mi na moguće pravce daljeg istraživanja. Takodje, njeni saveti su presudno uticali da ovaj rad bude mnogo bolje organizovan.

Zahvalan sam dr Siniši Crvenkoviću koji je pročitao rukopis i svojim savetima pomogao da se isprave pojedini propusti i nepreciznosti u tekstu.

Zahvaljujem se dr Zoranu Stojakoviću za pruženu podršku tokom izrade teze.

Dr Dragan Mašulović je pročitao rukopis originalnih rezultata trećeg poglavlja i dao niz korisnih sugestija koje su bitno popravile čitljivost tog dela rada, na čemu sam mu veoma zahvalan.

Posebno se zahvaljujem mr Nenadu Djapiću za pomoć prilikom pripreme i obrade teksta.

Novi Sad, 11.3.2002.

Uvod

Prema Birkhoffu, pojam algebre kompleksa potiče od Frobeniusa. On je za proizvoljnu grupu $\langle G, \cdot \rangle$ operaciju $\cdot$ proširio na prirodan način do operacije medju podskupovima skupa G. Naime, ako su $H, K \subseteq G$ tada

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}.$$

Ova definicija se lako može preneti i na slučaj operacije proizvoljne arnosti. Na taj način, svakoj algebri $\mathcal{A}$ možemo dodeliti njenu "stepenu algebru" $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, čiji će nosač biti skup svih podskupova algebre $\mathcal{A}$. Kako je cela teorija "stepenih" algebri počela u teoriji grupa, u kojoj se podskup nosača zove i kompleks, onda se algebre indukovane na partitinom skupu nosača zovu najčešće "algebre kompleksa", mada mnogi autori koriste i izraz "global algebre".

Pored teorije grupa, danas u literaturi postoji veliki broj oblasti gde se konstrukcija stepene algebre implicitno koristi. Takav slučaj je recimo kod distributivnih mreža, gde su operacije medju idealima u stvari samo "stepeni" odgovarajućih operacija same mreže. U teoriji formalnih jezika, operacija konkatenacije medju rečima se na prirodan način prenosi na operaciju medju jezicima (koji su u stvari skupovi reči). U intervalnoj aritmetici, u cilju analize grešaka kod numeričkih izračunavanja, operacije sa skupa realnih brojeva prenosimo na odgovarajuće intervale.

Jedno od osnovnih pitanja teorije algebri kompleksa je koliko se osobine osnovne strukture prenose na odgovarajuću algebru kompleksa. U tom smislu, u literaturi je detaljno razmatrano pitanje važenja identiteta na jednoj, odnosno drugoj algebri. Prvi prilog ovoj temi dao je Gautam još 50-tih godina prošlog veka. U suštini, on je opisao sve varijetete definisane jednim identitetom koji su zatvoreni u odnosu na formiranje globala. Grätzer i Lakser s druge strane, daju odgovor na pitanje koji se sve identiteti prenose sa varijeteta na odgovarajući varijetet algebri kompleksa i koriste taj rezultat da odrede sve varijetete odredjene algebrama kompleksa mreža i grupa.

Što se tiče osnovnih algebarskih struktura, u vezi sa algebrama kompleksa pretežno su izučavane semigrupe. Razlog je jednostavan - za razliku od drugih važnih klasa (grupe, mreže, prsteni itd) global semigrupe je takodje semigrupa. Najveći doprinos u ovoj oblasti dao je T. Tamura, od koga potiče sledeća klasifikacija izučavanih problema:

(1) Za datu klasu semigrupa opisati njihove algebre kompleksa.
(2) Za datu klasu globala semigrupa opisti semigrupe čiji globali spadaju u tu klasu.
(3) Problem globalne odredjenosti klasa semigrupa.

Za klasu algebri kažemo da je globalno odredjena ako su svake dve algebre te klase koje imaju izomorfne globale takodje izomorfne. Mada je Tamura dokazao globalnu odredjenost mnogih klasa semigrupa, ispostavilo se da klasa svih semigrupa nije globalno odredjena. Do ovog važnog rezultata došla je E.M.Mogiljanskaja. Takodje, treba pomenuti rezultat Y. Kobayashija, koji je pokazao globalnu odredjenost klase polumreža. Problemom globalne odredjenosti bavili su se i Jugoslovenski matematičari. Tako su S. Crvenković, I. Dolinka i M. Vinčić dokazali da klase involutivnih semigrupa, poluprstena i involutivnih prstena nisu globalno odredjene, a M. Vinčić je dokazao globalnu odredjenost klase *-bendova.

Prirodnu generalizaciju algebri kompleksa univerzalnih algebri predstavljaju algebre kompleksa relacijskih struktura. One se dobijaju konstrukcijom koja svakoj relaciji arnosti $n+1$ na nekom skupu dodeljuje operaciju arnosti n na partitivnom skupi. U ovom kontekstu obično se fundamentalnim operacijama takve algebre pridodaju skupovno-teoretske operacije i na taj način se dobija Booleova algebra sa operatorima. Ovu konstrukciju upotrebljavaju Jónsson i Tarski pri proučavanju Booleovih algebri sa operatorima. Izmedju ostalog, oni dokazuju da je svaka dobra Booleova algebra sa operatorima algebra kompleksa neke relacijske strukture.

Značajan pravac istraživanja predstavljaju varijeteti algebri kompleksa. Naime, primećeno je da se mnogi varijeteti mogu reprezentovati preko algebri kompleksa. Preciznije, takvi varijeteti mogu se predstaviti u obliku $V = SK^+$, gde je K neka klasa relacijskih struktura (najčešće elementarna), a K^+ sadrži sve izomorfne kopije algebri kompleksa struktura iz K. Zanimljivo je da motivacija i glavni primeri ovde dolaze iz modalne logike, što je detaljno demonstrirano u poznatom ekspozitornom radu Goldblatta iz 1989. godine.

Relaciji na skupu A možemo (na više načina) pridružiti odgovarajuću relaciju (iste arnosti) na skupu $\mathcal{P}(A)$. U teorijskom računarstvu ova stepena konstrukcija se pojavljuje preko stepenih domena ("powerdomains"). Domeni su klasa parcijalno uredjenih skupova koja se koristi kod modeliranja determinističkih programa. Naime, zgodno je skup stanja takvog programa posmatrati kao neki domen D, a sam program kao preslikavanje iz D u D. Prirodno, nedeterminističke programe tada interpretiramo kao preslikavanja iz D u $\mathcal{P}(D)$. To stvara potrebu da se struktura domena prenese sa D na $\mathcal{P}(D)$, a to se naravno postiže odgovarajućom stepenom konstrukcijom. U poslednje vreme u teorijskom računarstvu nalaze svoje mesto i stepeni grafovi. Oni se naime koriste kao modeli konkurentnih sistema.

Definicija "stepene relacije" koju je uveo Whitney, omogućuje nam da za svaku operacijsko-relacijsku strukturu formiramo odgovarajuću (operacijsko-relacijsku) strukturu kompleksa. I ovde je naravno ključno pitanje koje se osobine prenose ovom konstrukcijom. Najvažniji rezultat iz ove oblasti pripada Grätzeru i Whitneyu koji su opisali operacijsko-relacijske varijetete zatvorene u odnosu na formiranje struktura kompleksa ne ograničavajući se pritom na operacije konačne arnosti. Ostaje otvoreno pitanje koje su osobine prvog reda invarijantne u odnosu na opisanu konstrukciju.

Već iz ovog kratkog i nepotpunog pregleda jasno je da su stepene konstrukcije definisane i izučavane od strane raznih autora u raznim oblastima matematike. Mnogi od ovih autora često nisu bili upoznati sa radom ostalih i njihovi napori bili su ograničeni na primenu u jednoj uskoj oblasti. Chris Brink je prvi autor koji je uvideo nedostatak jednog opštijeg prilaza ovoj tematici. On je posmatrao stepene konstukcije kao celovitu oblast koja je vredna izučavanja sama po sebi. Izmedju ostalog, njegova namera je bila da pokaže kako se iste ideje pojavljuju u raznim granama matematike u kojima dolazi do primene stepenih konstrukcija. Naročitu pažnju posvetio je primenama u univerzalnoj algebri, jer su se tu, već na nivou bazičnih pojmova (homomorfizmi, podalgebre, faktor algebre) otvorila mnoga zanimljiva pitanja. Ova doktorska teza predstavlja pokušaj da se na neka od pokrenutih pitanja da odgovor.

Poglavlje 1

Stepene konstrukcije i njihove primene

1.1 Algebre kompleksa univerzalnih algebri

Za proizvoljnu n-arnu operaciju f na skupu A postoji prirodan način da se ona proširi na partitivni skup $\mathcal{P}(A)$. Naime, operacija $f^+ : \mathcal{P}(A)^n \to \mathcal{P}(A)$ se može definisati na sledeći način: za proizvoljne $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{P}(A)$

$$f^+(X_1, \ldots, X_n) = \{f(x_1, \ldots, x_n) \mid (\forall i \leq n)\, x_i \in X_i\}.$$

Na taj način svakoj univerzalnoj algebri $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ možemo dodeliti njenu "stepenu" algebru $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \langle \mathcal{P}(A), \{f^+ \mid f \in F\} \rangle$. Prema Birkhoffu, pojam stepene algebre potiče od Frobeniusa. On je tu konstrukciju posmatrao kod grupa. Kako se podskup nosača grupe zove i **kompleks**, onda tako nastale algebre zovemo **algebre kompleksa**. Umesto ovog naziva mnogi autori koriste izraz "global algebre", koji će se pojavljivati i u ovom radu.

Ponekad se u literaturi za nosač algebre kompleksa $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ uzima skup svih nepraznih podskupova skupa A. Mi ćemo algebru kompleksa dobijenu na taj način označavati sa $\mathcal{P}_+(\mathcal{A})$. Takav pristup (sa retkim izuzecima, npr. [17]) usvajaju autori koji se bave algebrama kompleksa specijalnih algebri. Autori koji se bave univerzalno-algebarskim aspektima ovog problema ponekad razmatraju obe mogućnosti (npr. [22]). Ako govorimo o algebrama kompleksa relacijskih struktura, ili ako "izvedenim" operacijama pridodamo i skupovno-teoretske operacije, onda je već neophodno uključiti i prazan skup u nosač odgovarajuće algebre. Mi ćemo, budući da ćemo taj pojam pratiti za proizvoljne univerzalne algebre, usvojiti sledeću definiciju algebre kompleksa:

Definicija 1.1 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ univerzalna algebra. Njena* **algebra kompleksa** *$\mathcal{P}(\mathcal{A})$ jeste algebra istog tipa kao $\mathcal{A}$ sa nosačem $\mathcal{P}(A)$, sa skupom fundamentalnih operacija $\{f^+ \mid f \in F\}$, koji je definisan na sledeći način:*

- *ako je $ar(f) = n \geq 1$, onda $ar(f^+) = n$ i za sve $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{P}(A)$*

$$f^+(X_1, \ldots, X_n) = \{f(x_1, \ldots, x_n) \mid (\forall i \leq n)\, x_i \in X_i\},$$

- *ako je $ar(f) = 0$, tj. $f : A^0 \to A$ je konstanta, onda $f^+ : \mathcal{P}(A)^0 \to \mathcal{P}(A)$ tako da*

$$f^+(\emptyset) = \{f(\emptyset)\}.$$

Drugim rečima, ako je $c \in A$ konstanta algebre $\mathcal{A}$, onda je odgovarajuća konstanta algebre kompleksa $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ definisana sa $c^+ = \{c\}$. Razlog za ovako specifično tretiranje konstante leži u tome što, zbog mnogih kasnijih razmatranja, želimo da algebra kompleksa $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ uvek sadrži u sebi izomorfnu kopiju originalne algebre $\mathcal{A}$.

Postoji veliki broj primera u literaturi gde se konstrukcija stepene operacije f^+ implicitno (ili eksplicitno) koristi.

- U teoriji grupa, koset xN je u stvari proizvod skupova $\{x\}$ i N u algebri kompleksa (gde je N normalna podgrupa).

- U teoriji mreža, skup ideala proizvoljne mreže $\mathcal{L}$ je takodje mreža (u odnosu na $\subseteq$), koju označavamo sa $I(\mathcal{L})$. Pri tome, ako je $\mathcal{L}$ distributivna mreža, onda se infimum i supremum u $I(\mathcal{L})$ dobijaju baš stepenovanjem infimuma i supremuma u $\mathcal{L}$.

- U teoriji formalnih jezika, pod jezikom podrazumevamo skup nizova simbola neke azbuke A. Sa operacijom konkatenacije i praznim nizom, to je monoid. Proizvod dva jezika definiše se kao stepena operacija konkatenacije.

- Intervalna aritmetika je značajna za analizu greške kod numeričkih izračunavanja. Ako nisu poznate tačne numeričke vrednosti već samo intervali u kojima leže, prirodno je vršiti računanje sa tim intervalima. Pri tome, operacije se dobijaju stepenovanjem uobičajenih operacija na realnim brojevima (obično sabiranja i množenja, mada možemo uključiti i druge operacije).

Medju osnovne osobine algebre kompleksa spada njen odnos sa osnovnim univerzalno-algebarskim operatorima H,S,P, ...

Teorema 1.1 *(a) Ako je $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizam, onda je i $\alpha^+ : \mathcal{P}(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}(\mathcal{B})$ takodje homomorfizam.*
(b) Ako su $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ i $\beta : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ homomorfizmi, onda je $(\beta \circ \alpha)^+ = \beta^+ \circ \alpha^+$.

Dokaz.
(a) Neka je $f \in F$ operacijski simbol arnosti n. Treba dokazati da za sve $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{P}(A)$ važi

$$\alpha^+((f^{\mathcal{A}})^+(X_1, \ldots, X_n)) = (f^{\mathcal{B}})^+(\alpha^+(X_1), \ldots, \alpha^+(X_n)),$$

što sledi iz

$$\begin{gathered} z \in \alpha^+((f^{\mathcal{A}})^+(X_1, \ldots, X_n)) \iff \\ (\exists x_1 \in X_1 \ldots \exists x_n \in X_n)\ z = \alpha(f^{\mathcal{A}}(x_1, \ldots, x_n)) \iff \\ (\exists x_1 \in X_1 \ldots \exists x_n \in X_n)\ z = (f^{\mathcal{B}}(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)) \iff \\ (\exists y_1 \in \alpha^+(X_1) \ldots \exists y_n \in \alpha^+(X_n))\ z = (f^{\mathcal{B}}(y_1, \ldots, y_n)) \iff \\ z \in (f^{\mathcal{B}})^+(\alpha^+(X_1), \ldots, \alpha^+(X_n)). \end{gathered}$$

(b) Ovo tvrdjenje važi za sve $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$. Naime, ako je $X \subseteq A$, onda je

$$\begin{gathered} (\beta \circ \alpha)^+(X) = \{\beta(\alpha(x)) \mid x \in X\} = \\ \beta^+(\{\alpha(x) \mid x \in X\}) = \beta^+(\alpha^+(X)) = (\beta^+ \circ \alpha^+)(X). \end{gathered}$$

□

Teorema 1.2 *(a) Ako je $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, onda je $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \leq \mathcal{P}(\mathcal{B})$.*

(b) Neka je $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizam. Tada je $\mathcal{P}(\alpha(\mathcal{A}))$ homomorfna slika algebre $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.

Dokaz.
(a) Sledi direktno iz definicije algebre kompleksa.
(b) Na osnovu Teoreme 1.1 (a), preslikavanje $\alpha^+ : \mathcal{P}(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}(\alpha(\mathcal{A}))$ je homomorfizam. Dalje, ako je $Y \subseteq \alpha(A)$ i $X = \alpha^{-1}(Y) = \{a \in A \mid \alpha(a) \in Y\}$, onda je $\alpha^+(X) = Y$, pa je α^+ epimorfizam.
□

S druge strane, nije svaka homomorfna slika algebre kompleksa $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ izomorfna sa algebrom kompleksa neke homomorfne slike od $\mathcal{A}$. Na primer, ako je $\mathcal{A} = \langle N, +\rangle$ i $\mathcal{B} = \langle\{1, -1\}, \cdot\rangle$, tada je $\alpha : \mathcal{P}(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ definisano sa

$$\alpha(X) = \begin{cases} 1 & \text{ako je } minX \text{ paran broj} \\ -1 & \text{ako je } minX \text{ neparan broj} \end{cases}$$

homomorfizam, ali dvoelementna algebra $\mathcal{B}$ ne može biti izomorfna nijednoj algebri kompleksa.

Takodje, podalgebra od $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ ne mora biti algebra kompleksa neke podalgebre algebre $\mathcal{A}$. Na primer, za svaku algebru $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ sadrži podalgebru izomorfnu sa $\mathcal{A}$, pri čemu, naravno, $\mathcal{A}$ ne mora biti izomorfna nekoj algebri kompleksa.

Ako je $\mathcal{A}$ neka algebra i $X \subseteq A$, onda sa $\langle X\rangle_{\mathcal{A}}$ obeležavamo najmanju podalgebru od $\mathcal{A}$ koja sadrži X.

Teorema 1.3 *Za proizvoljnu algebru $\mathcal{A}$ i $X \subseteq A$ važi*

$$\langle \mathcal{P}(X)\rangle_{\mathcal{P}(\mathcal{A})} \leq \mathcal{P}(\langle X\rangle_{\mathcal{A}}).$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1.2 (a), $\mathcal{P}(\langle X\rangle_{\mathcal{A}})$ je podalgebra od $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, pa tvrdjenje neposredno sledi iz $\mathcal{P}(X) \subseteq \mathcal{P}(\langle X\rangle_{\mathcal{A}})$.
□

Sledeća teorema govori o odnosu direktnog proizvoda algebri kompleksa i algebre kompleksa direktnog proizvoda.

Teorema 1.4 *Neka je $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ neprazna familija algebri. Tada je algebra $\prod_i \mathcal{P}_+(\mathcal{A}_i)$ izomorfna podalgebri algebre $\mathcal{P}_+(\prod_i \mathcal{A}_i)$.*

Dokaz. Definišimo preslikavanje $\varphi : \prod_i \mathcal{P}_+(A_i) \to \mathcal{P}_+(\prod_i A_i)$ na sledeći način:

$$\varphi(a) = \{\alpha \in (\prod_i A_i) \mid \alpha(i) \in a(i)\}.$$

Nije teško pokazati da je φ potapanje algebre $\prod_i \mathcal{P}_+(\mathcal{A}_i)$ u $\mathcal{P}_+(\prod_i \mathcal{A}_i)$.
□

Slično tvrdjenje važi i za ultraproizvode.

Teorema 1.5 *Neka je $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ neprazna familija algebri i U ultrafilter na I. Tada postoji potapanje algebre $\prod_i \mathcal{P}(\mathcal{A}_i)/U$ u $\mathcal{P}(\prod_i \mathcal{A}_i/U)$.*

Dokaz. Preslikavanje $\varphi : \prod_i \mathcal{P}(A_i)/U \to \mathcal{P}(\prod_i A_i/U)$ definisano sa

$$\alpha/U \in \varphi(a/U) \iff \{i \in I \mid \alpha(i) \in a(i)\} \in U$$

je dobro definisan injektivni homomorfizam.
□

U ovom kontekstu zanimljiv je i sledeći rezultat.

Teorema 1.6 *(V. Trnková, [44]) Neka je $\mathcal{N}_0$ aditivna semigrupa nenegativnih celih brojeva. Tada se svaka komutativna semigrupa može dobiti od $\mathcal{N}_0$ uzastopnim formiranjem direktnih proizvoda, algebri kompleksa i podsemigrupa.*

Ako je C neka klasa istotipnih algebri, sa $K(C)$ označavaćemo klasu svih algebri $\mathcal{P}_+(\mathcal{A})$, $\mathcal{A} \in C$. Iz rezultata Trnkove sledi da je klasa $ISKP(\mathcal{A}_0)$ varijetet. Nastavljajući istraživanja u ovom pravcu, Á. Szendrei pokazuje da $ISKP(C)$ ne mora biti čak ni aksiomatska klasa i daje jedan dovoljan uslov da $ISKP(C)$ bude kvazivarijetet.

Teorema 1.7 *([40]) Neka je $\mathcal{N}$ aditivna semigrupa pozitivnih celih brojeva. Tada $ISKP(\mathcal{N})$ nije aksiomatska klasa.*

Teorema 1.8 *([40]) Neka je C klasa algebri istog tipa bez nularnih operacijskih simbola, takva da je za svaku algebru $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ iz C skup A idempotent u $\mathcal{P}_+(\mathcal{A})$. Tada je $ISKP(C)$ kvazivarijetet.*

1.2 Algebre kompleksa i identiteti

U opštem slučaju, klasa algebri ne mora biti zatvorena u odnosu na formiranje algebri kompleksa. Na primer, algebra kompleksa grupe ne mora biti grupa. Takodje se lako vidi da se sa algebre $\mathcal{A}$ ne prenosi ni idempotentnost ni distributivnost na algebru $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. S druge strane, algebra kompleksa semigrupe je uvek semigrupa. Odgovor na pitanje koji se identiteti uvek prenose sa $\mathcal{A}$ na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ dao je Gautam 1957. Pre dokaza odgovarajuće teoreme, definisaćemo neke osnovne pojmove i dokazati pomoćna tvrdjenja.

Definicija 1.2 *Term $t(x_1,\dots,x_n)$ je* **linearan** *ako se svaka od promenljivih terma t pojavljuje u njemu tačno jednom. Identitet $t_1 \approx t_2$ je* **linearan** *ako su termi t_1 i t_2 linearni. Identitet $t_1 \approx t_2$ je* **regularan** *ako se isti skup promenljivih pojavljuje u oba terma t_1, t_2.*

Definicija 1.3 *Term $t^*(x_1,\dots,x_m)$ je* **generalizacija** *terma $t(x_1,\dots,x_n)$, $n \le m$, ako postoji surjektivno preslikavanje $\phi : \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$ tako da je $t = t^*(x_{\phi(1)},\dots,x_{\phi(m)})$ (drugim rečima t se dobija od t^* identifikovanjem promenljivih, tj. neke različite promenljive iz t^* zamenjuju se ne obavezno različitim promenljivima). Ako je, osim toga, t^* linearan term, tada kažemo da je t^** **linearizacija** *terma t.*

Lema 1.1 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ algebra, $\phi : \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$ surjektivno preslikavanje, $A_1,\dots A_n$ podskupovi skupa A i neka je term $p(x_1,\dots,x_m)$ linearizacija terma $t(x_1,\dots,x_n) = p(x_{\phi(1)},\dots,x_{\phi(m)})$. Tada je*

$$t(A_1,\dots,A_n) = \{p(b_1,\dots,b_m) \mid b_k \in A_{\phi(k)}\}.$$

Dokaz. Tvrdjenje dokazujemo indukcijom po dužini terma t, gde je dužina terma broj operacijskih simbola koji se u njemu pojavljuju. Za terme dužine 0 tvrdjenje očigledno važi. Pretpostavimo da tvrdjenje važi za sve terme čija je dužina manja od dužine terma t. Neka je $t(x_1,\dots,x_n) = f(t_1(x_1,\dots,x_n),\dots,t_l(x_1,\dots,x_n))$. Tada je

$$p(x_1,\dots,x_m) = f(p_1(x_1,\dots,x_m),\dots,p_l(x_1,\dots,x_m)),$$

gde su termi p_i linearizacije termova t_i. Sada imamo

$$t(A_1,\ldots,A_n) = f^+(t_1(A_1,\ldots,A_n),\ldots,t_l(A_1,\ldots,A_n)) =$$

$$= \{f(c_1,\ldots,c_l) \mid c_i \in t_i(A_1,\ldots,A_n)\},$$

gde je, po induktivnoj pretpostavci, $t_i(A_1,\ldots,A_n) = \{p_i(b_1,\ldots,b_m) \mid b_k \in A_{\phi(k)}\}$. Ali odatle, s obzirom da se u termu p sve promenljive pojavljuju tačno jednom, ne mogu da postoje dva pojavljivanja iste promenljive u p kojima odgovaraju različiti elementi iz skupa $\{b_1,\ldots,b_m\}$, tako da važi

$$t(A_1,\ldots,A_n) = \{f(p_1(b_1,\ldots,b_m),\ldots,p_l(b_1,\ldots,b_m)) \mid b_k \in A_{\phi(k)}\} =$$

$$\{p(b_1,\ldots,b_m) \mid b_k \in A_{\phi(k)}\}.$$

□

Kao direktnu posledicu prethodne leme dobijamo

Posledica 1.1 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A,F\rangle$ algebra i $t(x_1,\ldots,x_n)$ linearan term u kome se pojavljuju sve promenljive $x_1,\ldots,x_n$. Tada je*

$$t(A_1,\ldots,A_n) = \{t(a_1,\ldots,a_n) \mid a_1 \in A_1,\ldots,a_n \in A_n\}.$$

Teorema 1.9 *(Gautam, [18]) Neka je V varijetet univerzalnih algebri definisan identitetom $t_1 \approx t_2$, gde je $t_1 \neq t_2$. Tada dati identitet važi na svakoj algebri kompleksa $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, $A \in V$, ako i samo ako je on linearan i regularan.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Neka je $\mathcal{A}$ algebra varijeteta V definisanog linearnim i regularnim identitetom $t_1(x_1,\ldots,x_n) \approx t_2(x_1,\ldots,x_n)$. Ako su $A_1,\ldots,A_n$ neprazni podskupovi skupa A, tada je $t_1(A_1,\ldots,A_n) = t_2(A_1,\ldots,A_n)$ na osnovu Posledice 1.1. Ako je $A_i = \emptyset$ za neko $i \in \{1,\ldots,n\}$, onda je $t_1(A_1,\ldots,A_n) = t_2(A_1,\ldots,A_n) = \emptyset$, jer se iste promenljive pojavljuju u t_1 i t_2.

($\Rightarrow$) Neka identitet $t_1 \approx t_2$ važi na algebri kompleksa svake algebre varijeteta V definisanog tim identitetom. Primetimo da to u stvari znači da je varijetet V zatvoren u odnosu na konstrukciju formiranja algebri kompleksa. Dokazaćemo najpre da je dati identitet regularan. Pretpostavimo suprotno: neka promenljiva, recimo x_i, pojavljuje se u t_1 ali ne i u t_2. Ako su $A_1,\dots,A_n$ podskupovi skupa A takvi da je $A_i=\emptyset$ i $A_j\neq\emptyset$ za $j\neq i$, onda je $t_1(A_1,\dots,A_n)=\emptyset\neq t_2(A_1,\dots,A_n)$, pa dati identitet ne važi u $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.

Pretpostavimo sada da dati identitet nije linearan. Na osnovu gore dokazane regularnosti, zaključujemo da se isti skup promenljivih $x_1,\dots,x_n$ pojavljuje u oba terma. Treba razmotriti dva slučaja.

U prvom slučaju neka od promenljivih (recimo x_n, radi lakšeg zapisa) pojavljuje se p puta u termu t_1, i q puta u termu t_2, pri čemu je $p>q\geq 1$. Tada postoji term $p_1(x_1,\dots,x_{n+p-1})$ koji je generalizacija terma t_1 pri čemu je $t_1(x_1,\dots,x_n)=p_1(x_{\phi(1)},\dots,x_{\phi(n+p-1)})$, i $\phi(i)=i$ za $i<n$, $\phi(i)=n$ za $i\geq n$. Posmatrajmo slobodnu algebru $\mathcal{B}$ sa generatorima $a_1,\dots,a_n,\dots,a_{n+p-1}$ odredjenu identitetom $t_1(x_1,\dots,x_n)\approx t_2(x_1,\dots,x_n)$. Dokazaćemo da dati identitet ne važi na algebri $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ (koja se nalazi u V). Neka je $A_j=\{a_i\mid\phi(i)=j\}$, za sve $i\in\{1,\dots,n\}$. Jasno je da važi

$$p_1(a_1,\dots,a_{n+p-1})\in t_1(A_1,\dots,A_n).$$

Ako posmatramo odgovarajući term $p_1'=p_1(a_1,\dots,a_{n+p-1})$, u njemu se pojavljuju sve promenljive a_i, $i\geq n$. S druge strane, u bilo kom termu koji je predstavnik nekog elementa iz $t_2(A_1,\dots,A_n)$, pojavljuje se maksimalno q promenljivih iz tog skupa, jer t_1 i t_2 sadrže iste promenljive i u odgovarajućoj slobodnoj algebri dva terma sa različitim skupovima promenljivih ne mogu biti u istoj klasi. Odatle zaključujemo

$$p_1(a_1,\dots,a_{n+p-1})\notin t_2(A_1,\dots,A_n).$$

Druga mogućnost je da je dati identitet "uravnotežen" ("balanced"), odnosno, svaka promenljiva se pojavljuje isti broj puta sa obe strane identiteta. Ako zadržimo sve oznake iz prethodnog slučaja, ponovo dobijamo

$$p_1(a_1,\dots,a_{n+p-1})\in t_1(A_1,\dots,A_n).$$

Ovog puta, term $p_1'=p_1(a_1,\dots,a_{n+p-1})$ je jedini predstavnik svoje klase u slobodnoj algebri, jer ne postoji način da ga "transformišemo" koristeći identitet $t_1\approx t_2$. Zbog toga, a s obzirom na $t_1\neq t_2$, dobijamo

$$p_1(a_1,\dots,a_{n+p-1})\notin t_2(A_1,\dots,A_n).$$

□

Neka je V varijetet univerzalnih algebri. Sa $\mathcal{P}(V)$ označavaćemo varijetet generisan klasom $\{\mathcal{P}(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in V\}$. Odgovarajući varijetet koji generišu algebre kompleksa čiji je nosač skup nepraznih podskupova od A, označavaćemo sa $\mathcal{P}_+(V)$. Prirodno je zapitati se koji identiteti važe na ovim varijetetima, pri čemu polazimo od identiteta koji važe na V. Odgovor daju G. Grätzer i H. Lakser u [22]. Glavni deo dokaza sadržan je u teoremi koju ćemo dokazati posle jednog pomoćnog tvrdjenja.

Lema 1.2 *Neka su $p(x_1,\ldots,x_m)$ i $q(x_1,\ldots,x_m)$ termi gde su $x_1,\ldots,x_m$ različiti simboli promenljivih. Tada postoje ceo broj $n \geq m$, surjektivno preslikavanje $\phi : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,m\}$ i linearni termi $p'(x_1,\ldots,x_n)$, $q'(x_1,\ldots,x_n)$ takvi da je $p(x_1,\ldots,x_m) = p'(x_{\phi(1)},\ldots,x_{\phi(n)})$ i $q(x_1,\ldots,x_m) = q'(x_{\phi(1)},\ldots,x_{\phi(n)})$.*

Dokaz. Za sve $i \in \{1,\ldots,m\}$, neka su k_i i l_i brojevi pojavljivanja simbola x_i u termima p i q, redom, $n_0 = 0$, $n_i = \sum_{j=1}^{i} max\{k_j, l_j\}$, $n = n_m$. Definišimo preslikavanje $\phi : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,m\}$ na sledeći način: ako je $n_{i-1} < j \leq n_i$, onda je $\phi(j) = i$. Sada term p' dobijamo tako što u termu p r-to pojavljivanje (s leva na desno) simbola x_i zamenimo sa $x_{n_{i-1}+r}$. Naravno, na isti način dobijamo q' od q.
$\square$

Teorema 1.10 *(Grätzer, Lakser [22]) Neka su $x_1,\ldots,x_n$ različiti simboli promenljivih, $m \leq n$, $\phi : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,m\}$ surjektivno preslikavanje i $p(x_1,\ldots,x_n)$ i $q(x_1,\ldots,x_n)$ linearni termi. Ako u varijetetu $\mathcal{P}_+(V)$ važi identitet*

$$p(x_{\phi(1)},\ldots,x_{\phi(n)}) \approx q(x_{\phi(1)},\ldots,x_{\phi(n)}),$$

tada postoji permutacija π skupa $\{1,\ldots,n\}$ za koju je $\phi\pi = \phi$, tako da je u varijetetu V zadovoljen identitet

$$p(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(n)}) \approx q(x_1,\ldots,x_n).$$

Dokaz. Neka je $\mathcal{B}$ slobodna algebra varijeteta V sa skupom slobodnih generatora $\{a_1,\ldots,a_n\}$. Za sve $j \in \{1,\ldots,m\}$, definišimo $A_j \subseteq B$ sa $A_j = \{a_i \mid \phi(i) = j\}$. U $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ važi

$$p(A_{\phi(1)},\ldots,A_{\phi(n)}) = q(A_{\phi(1)},\ldots,A_{\phi(n)}).$$

Jasno je da $p(a_1,\ldots,a_n) \in p(A_{\phi(1)},\ldots,A_{\phi(n)})$. Na osnovu Leme 1.1, postoje elementi $a_{\alpha(1)},\ldots,a_{\alpha(n)}$, pri čemu $a_{\alpha(i)} \in A_{\phi(i)}$ za sve $i \in \{1,\ldots,n\}$, takvi da je $p(a_1,\ldots,a_n) = q(a_{\alpha(1)},\ldots,a_{\alpha(n)})$. S obzirom da je $\mathcal{B}$ slobodna algebra varijeteta V, u ovom varijetetu važi identitet

$$p(x_1,\ldots,x_n) \approx q(x_{\alpha(1)},\ldots,x_{\alpha(n)}). \tag{1.1}$$

Primetimo da je $\phi\alpha = \phi$. Slično tome, postoji preslikavanje $\beta : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ za koje je $\phi\beta = \phi$, tako da je u V zadovoljen identitet

$$q(x_1,\ldots,x_n) \approx p(x_{\beta(1)},\ldots,x_{\beta(n)}). \tag{1.2}$$

Ako zamenimo $x_{\alpha(i)}$ umesto x_i u (1.2), koristeći (1.1) dobijamo da u V važi identitet

$$p(x_1,\ldots,x_n) \approx p(x_{\alpha\beta(1)},\ldots,x_{\alpha\beta(n)}). \tag{1.3}$$

Odatle sledi da je u V zadovoljen identitet

$$p(x_1,\ldots,x_n) \approx p(x_{\gamma(1)},\ldots,x_{\gamma(n)}) \tag{1.4}$$

za svako preslikavanje γ koje je stepen od $\alpha\beta$. No, pošto se radi o preslikavanjima konačnog skupa, postoji stepen γ od $\alpha\beta$ koji je idempotent. To u stvari znači da je restrikcija preslikavanja γ na $X = Im(\gamma)$ identičko preslikavanje. Neka je $\beta' : X \to \beta(X)$ restrikcija preslikavanja β. Pošto je γ oblika $\delta\beta$, preslikavanje β' je bijekcija. Dalje, ako je β_j restrikcija preslikavanja β na $X \cap \phi^{-1}(j)$, tada $\beta_j : X \cap \phi^{-1}(j) \to \beta(X) \cap \phi^{-1}(j)$, jer je $\phi\beta = \phi$. Osim toga, i β_j je bijekcija za sve $j \in \{1,\ldots,m\}$. Odatle zaključujemo da za svako j, skupovi $\phi^{-1}(j) \setminus X$ i $\phi^{-1}(j) \setminus \beta(X)$ imaju isti broj elemenata. Neka je $\delta_j : \phi^{-1}(j) \setminus X \to \phi^{-1}(j) \setminus \beta(X)$ bijekcija. Definišimo permutaciju π skupa $\{1,\ldots,n\}$ na sledeći način:

$$\pi(k) = \begin{cases} \beta(k) & \text{ako } k \in X \\ \delta_j(k) & \text{ako } k \in \phi^{-1}(j) \setminus X \end{cases}$$

Lako je videti da je $\phi\pi = \phi$ i $\pi\gamma = \beta\gamma$. Zamenivši $x_{\pi(i)}$ umesto x_i u (1.4), a zatim $x_{\beta(i)}$ umesto x_i takodje u (1.4), dobijamo da u V važi identitet

$$p(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(n)}) \approx p(x_{\beta(1)},\ldots,x_{\beta(n)}).$$

Sada na osnovu (1.2) sledi da u V važi

$$p(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(n)}) \approx q(x_1,\ldots,x_n),$$

čime je tvrdjenje dokazano.
□

Teorema 1.11 *([22]) Ako je V varijetet, onda su u $\mathcal{P}_+(V)$ zadovoljeni tačno oni identiteti koji se dobijaju identifikovanjem promenljivih od linearnih identiteta koji važe u V.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 1.9 sledi da svi linearni identiteti zadovoljeni u V (a samim tim i sve njihove posledice) važe i u $\mathcal{P}_+(V)$. Obrnuto, neka identitet $p(x_1,\ldots,x_m) \approx q(x_1,\ldots,x_m)$ važi u $\mathcal{P}_+(V)$. Tada, prema Lemi 1.2 postoje termi $p'(x_1,\ldots,x_n)$ i $q'(x_1,\ldots,x_n)$ koji su linearizacije termova p i q redom, odredjene zajedničkim preslikavanjem $\phi : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,m\}$. Na osnovu Teoreme 1.10, odatle sledi da u V važi linearan identitet $p'(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(n)}) \approx q'(x_1,\ldots,x_n)$, gde je π permutacija skupa $\{1,\ldots,n\}$ za koju važi $\phi\pi = \phi$. Zamenom $x_{\phi(i)}$ umesto x_i u poslednji identitet, dobija se baš identitet $p(x_1,\ldots,x_m) \approx q(x_1,\ldots,x_m)$, čime je dokazano da je on posledica linearnog identiteta koji važi u V.
□

Teorema 1.12 *([22]) Ako je V varijetet, onda su u $\mathcal{P}(V)$ zadovoljeni tačno oni identiteti koji su regularni i dobijaju se identifikovanjem promenljivih od linearnih identiteta koji važe u V.*

Dokaz. Pošto je $\mathcal{P}_+(V) \subseteq \mathcal{P}(V)$, u $\mathcal{P}(V)$ mogu važiti samo identiteti iz prethodne teoreme. Iz dokaza Teoreme 1.9 jasno je da ti identiteti moraju biti regularni. Sada je lako proveriti da svi regularni identiteti dobijeni na opisani način važe u $\mathcal{P}(V)$.
□

Posledica 1.2 *Ako je V varijetet, tada je $\mathcal{P}_+(\mathcal{P}_+(V)) = \mathcal{P}_+(V)$.*

Dokaz. Direktno sledi iz Teoreme 1.11.
□

Zanimljivo je da u pomenutom radu [22] postoji greška. Naime, autori, kao posledicu Teoreme 1.12, navode da za svaki varijetet V važi $\mathcal{P}(\mathcal{P}(V)) = \mathcal{P}(V)$. Da ovo nije tačno pokazuju L.Vaš i R.Madarász u [45].

Primer 1.1 *Neka je W varijetet grupoida definisan identitetom $xy \approx x$ i $V = \mathcal{P}(W)$. Tada u V važi $xx \approx x$. Neka je $\mathcal{B}$ slobodan grupoid u V sa skupom slobodnih generatora $\{a,b\}$. Tada je*

$$\{a,b\}\{a,b\} = \{a,ab,ba,b\} \neq \{a,b\}$$

jer je $ab \neq a$, $ab \neq b$, $ba \neq a$, $ba \neq b$. Naime, u V ne važe identiteti $xy \approx x$ i $xy \approx y$, pošto nisu regularni.

1.3 Globalna odredjenost klasa algebri

U prethodna dva odeljka posmatrali smo algebre kompleksa sa univerzalno-algebarskog stanovišta. Ovakav pristup, medjutim, ne sreće se često u literaturi. U stvari, najveći deo dobijenih rezultata odnosi se na algebre kompleksa specijalnih algebarskih struktura. Najviše se zna o algebrama kompleksa semigrupa, što je sasvim razumljivo; za razliku od ostalih "popularnih" klasa, klasa semigrupa je zatvorena u odnosu na ovu konstrukciju.

Jedan od najdetaljnije izučavanih problema iz ove oblasti je pitanje globalne odredjenosti klasa algebri. Naime, ako su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ izomorfne algebre, tada na osnovu Teoreme 1.1 (a) važi $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Prirodno je postaviti pitanje da li (i kada) važi obrnuta implikacija. To nas dovodi do definicije globalno odredjene klase, koju dajemo u terminima algebre $\mathcal{P}_+(\mathcal{A})$, jer je to uobičajeni pristup u literaturi.

Definicija 1.4 *Kažemo da je klasa (istotipnih) algebri* **globalno odredjena** *ako za svake dve algebre $\mathcal{A},\mathcal{B}$ te klase važi:*

$$\mathcal{P}_+(\mathcal{A}) \cong \mathcal{P}_+(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A} \cong \mathcal{B}.$$

Kada dokazujemo da je neka klasa globalno odredjena, osnovna ideja je da iskoristimo to što global svake algebre sadrži njenu izomorfnu kopiju, koja se sastoji od jednoelementnih podskupova nosača algebre. Neformalno rečeno, ako jednoelementni podskupovi poseduju neko svojstvo koje je invarijanta izomorfizma, a ostali elementi ga nemaju, tada svaki izomorfizam globala indukuje izomorfizam osnovnih algebri, jer se skup jednoelementnih podskupova preslikava na sebe.

Definicija 1.5 *Za klasu algebri kažemo da ima* **svojstvo jakog izomorfizma**, *ako za svake dve algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ te klase važi sledeće: ako je $\varphi : \mathcal{P}_+(A) \to \mathcal{P}_+(B)$ izomorfizam, tada je $\varphi(A') = B'$, gde su A' i B' skupovi jednoelementnih podskupova skupova A i B, redom. U daljem tekstu umesto izraza svojstvo jakog izomorfizma koristićemo skraćenicu SIP (od strong isomorphism property).*

Lema 1.3 *Ako klasa algebri ima SIP, tada je ona globalno odredjena.*

Dokaz. Sledi iz razmatranja iznad Definicije 1.5.
□

Videćemo kasnije da je SIP jači od globalne odredjenosti, tj. postoje globalno odredjene klase algebri koje nemaju SIP.

Što se tiče nekih najpoznatijih klasa algebri, T. Tamura i J. Shafer primetili su u [43] da je klasa grupa globalno odredjena. Štaviše, važi sledeće tvrdjenje.

Teorema 1.13 *Klasa grupa ima SIP.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{G} = \langle G, \cdot \rangle$ grupa i A invertibilan element u $\mathcal{P}_+(\mathcal{G})$. Tada je $AA^{-1} = \{e\}$, gde je e jedinica grupe $\mathcal{G}$. Odatle je $|A| \leq |AA^{-1}| = 1$, pa je A jednoelementan skup. Dakle, jedini invertibilni elementi u $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ su jednoelementni skupovi, pa svaki izomorfizam globala $\mathcal{P}_+(\mathcal{G}_1)$ i $\mathcal{P}_+(\mathcal{G}_2)$ slika G_1' na G_2', gde su G_i', $i = 1, 2$, skupovi jednoelementnih podskupova od G_i.
□

Posledica 1.3 *Klasa prstena ima SIP.*

Dokaz. Neka su $\mathcal{R}_i = \langle R_i, +, \cdot \rangle$, $i = 1, 2$, prsteni i $\varphi : \mathcal{P}_+(R_1) \to \mathcal{P}_+(R_2)$ izomorfizam globala ovih prstena. Medjutim, onda je φ takodje izomorfizam algebri kompleksa $\mathcal{P}(\langle R_1, + \rangle)$ i $\mathcal{P}(\langle R_2, + \rangle)$, pa je, na osnovu Teoreme 1.13, $\varphi(R_1') = (R_2')$.
□

Iz dokaza prethodne teoreme vidimo zašto je važno razdvojiti SIP od "obične" globalne odredjenosti. Naime, lako je pokazati da, ako neku klasu algebri koja ima SIP "obogatimo" novim operacijama, dobijena klasa takodje će imati SIP. Medjutim, to u opštem slučaju ne važi i za globalno odredjene klase.

80-tih godina dobijeni su neki značajni rezultati koji se odnose na globalnu odredjenost polumreža. Najpre su M. Gould i I. A. Iskra ([21]) pokazali da je klasa konačnih polumreža globalno odredjena, a zajedno sa C. Tsinakisom ([20]) dobili su isti rezultat za polumreže sa jedinicom i mreže. Ali svi ovi rezultati mogu se dobiti kao posledica tvrdjenja koje je nešto kasnije dokazao Y. Kobayashi.

Teorema 1.14 *(Kobayashi, [27]) Klasa polumreža ima SIP.*

Dokaz ovog tvrdjenja izostavljamo, zbog njegove dužine.

Kao što je SIP kod prstena posledica postojanja istog svojstva kod klase grupa, tako iz Teoreme 1.14 direktno slede dva naredna tvrdjenja.

Posledica 1.4 *Klasa mreža ima SIP.*

Posledica 1.5 *Klasa Booleovih algebri ima SIP.*

1.4 Globalna odredjenost semigrupa

Probleme vezane za globalnu odredjenost klasa semigrupa postavili su (nezavisno) B.M. Schein i T. Tamura 60-tih godina. Već smo naveli rezultat Tamure i Shafera o globalnoj odredjenosti grupa. Tamura je kasnije nastavio istraživanja u tom pravcu i dokazao globalnu odredjenost još nekih klasa semigrupa. Ovde navodimo deo njegovih rezultata.

Definicija 1.6 *Semigrupa $\mathcal{S} = \langle S, \cdot \rangle$ je* **semigrupa levih nula** *ako je $xy = x$ za sve $x, y \in S$. Analogno, $\mathcal{S}$ je* **semigrupa desnih nula** *ako je $xy = y$ za sve $x, y \in S$.*

Sledeće tvrdjenje direktno sledi iz prethodne definicije

Lema 1.4 *$\mathcal{S}$ je semigrupa levih(desnih) nula ako i samo ako je $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ semigrupa levih(desnih) nula.*

Uz generalizovanu hipotezu kontinuuma, iz prethodne leme direktno sledi

Teorema 1.15 *Neka su $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ semigrupe levih (desnih) nula. Ako je $\mathcal{P}(\mathcal{S}_1) \cong \mathcal{P}(\mathcal{S}_2)$, onda je $\mathcal{S}_1 \cong \mathcal{S}_2$.*

Treba pomenuti da, iako su ove dve klase globalno odredjene, one nemaju SIP. To opet sledi iz Leme 1.4, jer je global semigrupe levih nula takodje semigrupa levih nula, pa je svaka bijekcija globala izomorfizam.

Definicija 1.7 **Pravougaoni bend** *je direktni proizvod semigrupe levih nula i semigrupe desnih nula.* **Pravougaona grupa** *je direktni proizvod pravougaonog benda i grupe.*

Definicija 1.8 *Neka je $\mathcal{T}$ podsemigrupa semigrupe $\mathcal{S}$ takva da $xy \in T$ za sve $x, y \in S$. Kažemo da je $\mathcal{S}$* **inflacija** *semigrupe $\mathcal{T}$, ako postoji idempotentni homomorfizam ψ semigrupe $\mathcal{S}$ takav da je $\psi(S) = T$.*

Lema 1.5 *(Tamura, [41]) Neka je $\mathcal{B}$ pravougaoni bend $\mathcal{L} \times \mathcal{R}$. Tada je $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ inflacija pravougaonog benda $\mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{R})$.*

Dokaz. Neka $X \in \mathcal{P}(B)$, $\pi_L(X) = \{x \in L \mid (x,y) \in X \text{ za neko } y \in R\}$ i $\pi_R(X) = \{y \in R \mid (x,y) \in X \text{ za neko } x \in L\}$. Definišimo $\psi : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(L) \times \mathcal{P}(R)$ na sledeći način:

$$\psi(X) = \pi_L(X) \times \pi_R(X).$$

Nije teško pokazati da je ψ idempotentni homomorfizam semigrupe $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ na njenu podsemigrupu $\mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{R})$. Osim toga za proizvoljno $X, Y \in \mathcal{P}(B)$ važi:

$$XY = \psi(X)\psi(Y) = \{(x,y) \in B \mid (x,z) \in X \text{ i } (t,y) \in Y \text{ za neke } z \in R, t \in L\}.$$

Dakle, $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ je inflacija pravougaonog benda $\mathcal{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{P}(\mathcal{R})$ s obzirom na ψ. Osim toga, $\mathcal{P}(L) \times \mathcal{P}(R)$ je najmanji ideal u $\mathcal{P}(\mathcal{B})$.
□

Teorema 1.16 *Klasa pravougaonih bendova je globalno odredjena.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{P}(\mathcal{B}_1) \cong \mathcal{P}(\mathcal{B}_2)$, pri čemu je $\mathcal{B}_i = \mathcal{L}_i \times \mathcal{R}_i$, za $i = 1,2$. Tada je $\mathcal{P}(\mathcal{L}_1) \times \mathcal{P}(\mathcal{R}_1) \cong \mathcal{P}(\mathcal{L}_2) \times \mathcal{P}(\mathcal{R}_2)$. Koristeći Lemu 1.4 lako je pokazati da je $\mathcal{P}(\mathcal{L}_1) \cong \mathcal{P}(\mathcal{L}_2)$ i $\mathcal{P}(\mathcal{L}_2) \cong \mathcal{P}(\mathcal{R}_2)$. Sada na osnovu Teoreme 1.15 dobijamo $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$ i $\mathcal{R}_1 \cong \mathcal{R}_2$, pa je $\mathcal{B}_1 \cong \mathcal{B}_2$.
□

Tamura je dokazao globalnu odredjenost još nekih klasa semigrupa. Izmedju ostalog, globalno odredjene su klase pravougaonih grupa, potpuno prostih semigrupa i potpuno 0-prostih semigrupa. Takodje, globalno odredjena je i klasa *-bendova, što je dokazao M. Vinčić u [46].

Bez obzira na sve pozitivne rezultate o globalnoj odredjenosti nekih specijalnih klasa semigrupa koje smo naveli, ispostavilo se da klasa svih semigrupa ipak nije globalno odredjena. To je pokazala E. M. Mogiljanskaja 1973 godine. Naime, ona je konstruisala proizvoljno velike familije po parovima neizomorfnih, a globalno izomorfnih semigrupa. Ovde ćemo izdvojiti jedan primer koji ilustruje globalnu neodredjenost klase semigrupa.

Definicija 1.9 *Neka je $\mathcal{S} = \langle S, \cdot \rangle$ semigrupa sa nulom. S je* **nilpotentna** *ako je $S^n = \{0\}$ za neko $n \in N$.* □

Neka je sada $\mathcal{S} = \langle S, * \rangle$ slobodna nilpotentna semigrupa čija je klasa nilpotentnosti n, nad prebrojivom azbukom $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$, i $S_1 = S \cup \{k\}$. Uvedimo binarnu operaciju $\cdot$ na S_1 tako da za proizvoljne elemente a_i, a_j iz S važi $a_i \cdot a_j = a_i * a_j$, dok je $a_i \cdot k = k \cdot a_i = 0$.

Teorema 1.17 *([32]) Neka je $\mathcal{S} = \langle S, \cdot \rangle$ slobodna nilpotentna semigrupa klase nilpotentnosti $n \geq 3$. Tada je*

(a) $\mathcal{P}(\mathcal{S}) \cong \mathcal{P}(\mathcal{S}_1)$;

(b) $\mathcal{S} \ncong \mathcal{S}_1$.

Dokaz. *(a)* Neka je $l(u)$ dužina reči u nad azbukom A. Reči dužine manje od n identifikovaćemo sa odgovarajućim elementima semigrupe S. Neka je

$$N = \{u \in S \mid l(u) = n - 1\};$$

$$N' = \{a_1a_2 \dots a_{n-1}, a_na_{n+1} \dots a_{2n-2}, \dots\};$$
$$C(N') = \{H' \mid H' \subseteq N',\ |H'| \geq n-1\};$$
$$C(N,k) = \{\{k\} \cup H \mid H \subseteq N\}.$$

Primetimo da se reči iz N' sastoje od $n-1$ uzastopnog slova iz A, kao i da dve različite reči nemaju zajedničkih slova. Dalje, jasno je da su N i N' beskonačni i prebrojivi, dok $C(N')$ i $C(N,k)$ imaju kardinalnost kontinuuma.

Neka je ψ proizvoljno "1-1" preslikavanje skupa $C(N')$ na $C(N') \cup C(N,k)$. Definišimo preslikavanje $\phi : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S_1)$ na sledeći način. Uzmimo proizvoljno $M \in \mathcal{P}(S)$. Jasno je da se M može predstaviti kao

$$M = T \cup M_{n-1} \cup Q,$$

gde je $T \subseteq S \setminus (N \cup \{0\})$, $M_{n-1} \subseteq N$, $Q = \{0\}$ ili $Q = \emptyset$. Tada

$$\phi(M) = \begin{cases} M & \text{ako } M_{n-1} \notin C(N') \\ T \cup \psi(M_{n-1}) \cup Q & \text{ako } M_{n-1} \in C(N') \end{cases}$$

Lako je videti da je ϕ bijekcija. Pokažimo sada da je ϕ izomorfizam. Ako $M', M'' \in \mathcal{P}(S)$, onda je

$$M' = T' \cup M'_{n-1} \cup Q',$$
$$M'' = T'' \cup M''_{n-1} \cup Q'',$$
$$M'M'' = T'T'' \cup Q = T''' \cup M'''_{n-1} \cup Q'''.$$

Pretpostavimo da $M'''_{n-1} \in C(N')$. Tada je $M'''_{n-1} \subseteq N'$, $|M'''_{n-1}| \geq n-1$ i $M'''_{n-1} \subseteq T'T''$. Kako M'''_{n-1} sadrži bar $n-1$ reči dužine $n-1$ u kojima se pojavljuju različita slova azbuke A, moraju postojati reči $u', v' \in T'$ i $u'', v'' \in T''$, takve da $u' \neq v'$, $u'' \neq v''$, $l(u') = l(v') = p$, $l(u'') = l(v'') = n-1-p$, $1 \leq p \leq n-2$, $u'u'' \in M'''_{n-1}$, $v'v'' \in M'''_{n-1}$. Medjutim, onda $u'v'' \in M'''_{n-1}$, jer $u'v'' \in T'T''$ i $l(u'v'') = n-1$. To nas dovodi do kontradikcije, pošto $M'''_{n-1} \in C(N')$, pa reči $u'u''$ i $u'v''$ ne bi smele imati zajedničkih slova.

Dakle, $M'''_{n-1} \notin C(N')$, pa sada imamo

$$\phi(M'M'') = M'M'' = T'T'' \cup Q = \phi(M')\phi(M'')$$

(b) Neka je $\phi : S \to S_1$ izomorfizam i $\phi(u) = k$. Iz $k\phi(x) = 0$ za sve $x \in S$, dobijamo $\phi(ux) = 0$, odnosno, $ux = 0$ za sve $x \in S$. To znači da $u \in N$, pa je $u = vz$, $v, z \in S$. Medjutim, odatle je $k = \phi(v)\phi(z)$, što je nemoguće.
□

Na osnovu rezultata Mogiljanskaje, S. Crvenković, I. Dolinka i M. Vinčić dokazali su u [14] da klasa involutivnih semigrupa nije globalno odredjena. U istom radu oni takodje pokazuju da klase involutivnih poluprstena i poluprstena nisu globalno odredjene.

1.5 Globalna odredjenost unarnih algebri

Svi rezultati koje smo pomenuli u prethodna dva odeljka odnose se na semigrupe ili na algebre koje, izmedju ostalih, sadrže bar jednu binarnu asocijativnu operaciju. Osim ovih, u literaturi su razmatrane i unarne algebre. Tako A. Drapal dobija sledeće rezultate za monounarne algebre (unarne algebre sa samo jednom operacijom).

Teorema 1.18 *([17]) Klasa monounarnih algebri nije globalno odredjena.*

Dokaz. Neka je A skup svih nenegativnih celih brojeva, B skup svih pozitivnih celih brojeva, $\mathcal{A} = \langle A, f \rangle$ i $\mathcal{B} = \langle B, g \rangle$ unarne algebre gde su operacije g i f definisane na sledeći način:

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{ako je } x \text{ paran pozitivan broj} \\ x+1 & \text{ako je } x \text{ neparan broj} \end{cases}$$

$$f(0) = 0.$$

Algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ očigledno nisu izomorfne, ali njihovi globali jesu. Da bismo to verifikovali, primetimo najpre da oba globala sadrže $2^{\aleph_0}$ fiksnih tačaka - to su svi oni skupovi X za koje važi $2x-1 \in X \iff 2x \in X$. Za sve ostale skupove Y važi $(f^+)^2(Y) = Y$ (odnosno $(g^+)^2(Y) = Y$) i njih takodje ima $2^{\aleph_0}$ u oba globala.
□

Teorema 1.19 *([17]) Klasa konačnih parcijalnih monounarnih algebri je globalno odredjena.*

Dokaz izostavljamo, zbog njegove dužine.

Sledeći rezultat koji je dobila E. Lukács zanimljiv je jer se pojavljuju klase konačnih algebri koje nisu globalno odredjene.

Neka je $\mathcal{G} = (G, \cdot, ^{-1}, e)$ konačna grupa. Sa $\langle A, G \rangle$ označićemo permutacijsku reprezentaciju grupe $\mathcal{G}$ na nekom (konačnom) skupu A. Ovu reprezentaciju posmatramo kao unarnu algebru na skupu A (operacije su permutacije iz G) i zovemo je *G-algebrom*. *Permutacijski karakter* ove reprezentacije je funkcija $\chi : G \to N \cup \{0\}$ koja svakoj permutaciji $g \in G$ dodeljuje broj njenih fiksnih tačaka. Sa $Fix_A(g)$ i $Fix_A(\mathcal{H})$, označavamo skup fiksnih tačaka elementa $g \in G$, odnosno podgrupe $\mathcal{H}$ grupe $\mathcal{G}$, redom. Ako $a \in A$, sa $\langle a \rangle = G(a)$ označavamo podalgebru algebre $\langle A, G \rangle$ generisanu sa a. *Stabilizator* elementa $a \in A$ u oznaci G_a je skup svih elemenata (permutacija) $g \in G$ za koje je $g(a) = a$. $Orb_A(G)$ označava skup orbita grupe permutacija $\mathcal{G}$, tj. skup minimalnih podalgebri algebre $\langle A, G \rangle$. Najzad, umesto $\langle A, \langle g \rangle \rangle$ pisaćemo $\langle A, g \rangle$. Primetimo još da iz dokaza Teoreme 1.1 (b) sledi da je global G-algebre ponovo G-algebra.

Bez dokaza navodimo neka poznata tvrdjenja iz teorije grupa.

Lema 1.6 *Neka je $\mathcal{G}$ konačna grupa permutacija i $\mathcal{H}$ podgrupa grupe $\mathcal{G}$. Tada je*

$$|Orb(H)| = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} |Fix(h)|.$$

Ako je $\mathcal{H}$ ciklična, tada je

$$|Orb(H)| = \frac{1}{|H|} \sum_{i||H|} \varphi(i) |Fix(h_i)|,$$

gde je h_i element reda i u $\mathcal{H}$ i φ je Ojlerova funkcija.

Lema 1.7 *Neka je $\mathcal{G}$ konačna grupa koja nije ciklična. Tada postoje neizomorfne permutacijske reprezentacije grupe $\mathcal{G}$ koje imaju iste permutacijske karaktere.*

Sledeća lema daje potreban i dovoljan uslov za izomorfnost G-algebri.

Lema 1.8 *Neka su $\mathcal{A} = \langle A, G\rangle$ i $\mathcal{B} = \langle B, G\rangle$ konačne G-algebre. Tada je $\langle A, G\rangle \cong \langle B, G\rangle$ ako i samo ako je $|Fix_A(H)| = |Fix_B(H)|$ za sve podgrupe $\mathcal{H}$ grupe $\mathcal{G}$.*

Dokaz. Neka je $|Fix_A(H)| = |Fix_B(H)|$ za sve podgrupe $\mathcal{H}$ grupe $\mathcal{G}$. Kako je $Fix_A(H) = \{a \in A \mid H \subseteq G_a\}$, indukcijom po indeksu podgrupe $\mathcal{H}$ nije teško dokazati da je

$$|\{a \in A \mid H = G_a\}| = |\{b \in B \mid H = G_b\}|,$$

za sve $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$. Definisaćemo izomorfizam φ datih G-algebri na sledeći način. Pretpostavimo da je φ već definisan na podalgebri $\mathcal{A}_0$ algebre $\mathcal{A}$ (ili je $A_0 = \emptyset$), tako da je $\varphi(A_0) = B_0$ i $G_a = G_{\varphi(a)}$ za sve $a \in A_0$. Ako je $A_0 \neq A$ i $a_0 \in A \setminus A_0$, tada važi:

$$1 \leq |\{a \in A \setminus A_0 \mid G_a = G_{a_0}\}| = |\{a \in A \mid G_a = G_{a_0}\}| - |\{a \in A_0 \mid G_a = G_{a_0}\}| =$$

$$= |\{b \in B \mid G_b = G_{a_0}\}| - |\{b \in B_0 \mid G_b = G_{a_0}\}| = |\{b \in B \setminus B_0 \mid G_b = G_{a_0}\}|,$$

pri čemu smo koristili gore dokazanu jednakost i uslov iz definicije φ na A_0. Odatle sledi da postoji $b \in B \setminus B_0$ tako da je $G_{a_0} = G_{b_0}$. Sada proširujemo φ na $A_0 \cup \langle a_0\rangle$ tako da je $\varphi(g(a_0)) = g(b_0)$, za sve $g \in G$. Nije teško pokazati da je $\varphi_{A_0 \cup \langle a_0\rangle}$ izomorfizam na $B_0 \cup \langle b_0\rangle$, pri čemu je $G_a = G_{\varphi(a)}$ za sve $a \in A_0 \cup \langle a_0\rangle$. Skup A je konačan, pa ponavljajući opisani postupak dovoljan broj puta dobijamo injektivni homomorfizam sa $\mathcal{A}$ na $\mathcal{B}$, koji je izomorfizam zbog $|A| = |Fix_A(\{e\})| = |Fix_B(\{e\})| = |B|$.
□

Teorema 1.20 *Neka su $\mathcal{A} = \langle A, G\rangle$ i $\mathcal{B} = \langle B, G\rangle$ konačne G-algebre. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \cong \mathcal{P}(\mathcal{B})$;

(b) $|Fix_A(g)| = |Fix_B(g)|$, *za sve* $g \in G$;

(c) $\langle A, g\rangle \cong \langle B, g\rangle$, *za sve* $g \in G$.

Dokaz.
$(a) \iff (b)$

Pomenuli smo ranije da su $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ i $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ takodje G-algebre. To znači da je na osnovu prethodne leme (a) ekvivalentno sa uslovom

$$|Fix_{\mathcal{P}(A)}(H)| = |Fix_{\mathcal{P}(B)}(H)| \quad \text{za sve } \mathcal{H} \leq \mathcal{G}.$$

Medjutim, fiksne tačke podgrupe $\mathcal{H}$ u algebri kompleksa su unije kompletnih orbita od $\mathcal{H}$, pa je

$$Fix_{\mathcal{P}(A)}(H) = 2^{|Orb_B(H)|-1}.$$

Dakle, (a) važi ako i samo ako je ispunjen uslov

$$|Orb_A(H)| = |Orb_B(H)| \quad \text{za sve } \mathcal{H} \leq \mathcal{G}.$$

Ovaj uslov sledi iz (b) na osnovu prve jednakosti Leme 1.6. Da važi i obrnuto dokazuje se indukcijom po redu elementa g, koristeći drugu jednakost Leme 1.6.
$(b) \iff (c)$
Jasno je da iz (c) sledi (b). Obrnuto je posledica Leme 1.8, s obzirom da su sve podgrupe ciklične grupe ciklične i da je skup fiksnih tačaka ciklične grupe jednak skupu fiksnih tačaka bilo kojeg njenog generatornog elementa.
□

Teorema 1.21 *Neka je $\mathcal{G}$ konačna grupa. Tada je klasa konačnih G-algebri globalno odredjena ako i samo ako je $\mathcal{G}$ ciklična.*

Dokaz. Ako je $\mathcal{G}$ ciklična, tvrdjenje sledi iz ekvivalencije uslova (a) i (c) prethodne teoreme. Ako $\mathcal{G}$ nije ciklična, tvrdjenje je posledica Leme 1.7 i ekvivalencije uslova (a) i (b) prethodne teoreme.
□

1.6 Algebre kompleksa relacijskih struktura i Booleove algebre sa operatorima

Pojam algebre kompleksa relacijskih struktura uvode B. Jónsson i A. Tarski u radu [26]. Kao što ćemo videti, on je opštiji od pojma algebre kompleksa univerzalnih algebri (obuhvata ga kao specijalan slučaj).

Definicija 1.10 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R} \rangle$ neka relacijska struktura. Njena algebra kompleksa $\mathcal{A}^+$ jeste algebra sa nosačem $\mathcal{P}(A)$ i skupom fundamentalnih operacija $\{R^\uparrow \mid R \in \mathcal{R}\}$ koje su definisane na sledeći način: ako je $R \subseteq A^{n+1}$ onda $R^\uparrow : \mathcal{P}(A)^n \to \mathcal{P}(A)$ tako da za sve $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{P}(A)$*

$$R^\uparrow(X_1, \ldots, X_n) = \{y \in A \mid (\forall i \leq n)(\exists x_i \in X_i)\ (x_1, \ldots, x_n, y) \in R\}.$$

Napomene

1. U slučaju da je $n = 0$, tj. $R \subseteq A$, odgovarajuća operacija $R^\uparrow$ je u stvari nularna operacija čija je vrednost baš $R \in \mathcal{P}(A)$.

2. Primetimo da je ova definicija uopštenje pojma algebre kompleksa univerzalne algebre. Naime, ako je $f : A^n \to A$ n-arna operacija, onda možemo definisati njoj odgovarajuću $n+1$-arnu relaciju $R(f)$ na A na sledeći način:

$$(a_1, \ldots, a_n, a) \in R(f) \text{ ako i samo ako } f(a_1, \ldots, a_n) = a.$$

   Sada za sve $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{P}(A)$ važi

$$R(f)^\uparrow(X_1, \ldots, X_n) = \{x \in A \mid (\forall i \leq n)(\exists x_i \in X_i)\ f(x_1, \ldots, x_n) = x\} =$$

$$f^+(X_1, \ldots, X_n).$$

   To znači da algebru kompleksa univerzalne algebre možemo posmatrati kao algebru kompleksa neke relacijske strukture.

3. Poli-operacija f na nepraznom skupu A je preslikavanje $f : A^n \to \mathcal{P}(A)$. Ako je F neki skup poli-operacija skupa A, tada je $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ poli-algebra. Poli-operaciji f odgovara $n+1$-arna relacija $R(f)$ definisana na sledeći način: $(a_1, \ldots, a_n, a) \in R(f)$ ako i samo ako $a \in f(a_1, \ldots, a_n)$. Dakle, gornju definiciju možemo posmatrati i kao definiciju algebre kompleksa poli-algebre.

U originalnom (dvodelnom) radu [26] pored operacija $R^\uparrow$ u definiciju algebre kompleksa "ubačene" su i skupovno-teoretske operacije $\cup, \cap, ^-$, tj. za $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R} \rangle$, algebra kompleksa je $\mathcal{A}^+ = \langle \mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^-, \{R^\uparrow \mid R \in \mathcal{R}\} \rangle$. Usvajajući takvu definiciju Jónsson i Tarski su uspeli da dokažu tzv. teoremu reprezentacije za Booleove algebre sa operatorima. Mi ćemo u nastavku ove sekcije dati kompletan dokaz te teoreme.

Podsetimo se nekih dobro poznatih definicija i tvrdjenja.

Definicija 1.11 *Algebra $\mathcal{B} = \langle B, +, \cdot, ', 0, 1 \rangle$, gde su $+, \cdot$ binarne, $'$ unarna i $0, 1$ nularne operacije je* **Booleova algebra** *(ubuduće ćemo koristiti skraćenicu BA) ako važi sledeće:*

(1) $\langle B, +, \cdot \rangle$ *je distributivna mreža;*
(2) $x \cdot 0 = 0$; $x + 1 = 1$;
(3) $x \cdot x' = 0$; $x + x' = 1$.

za sve $x \in B$.

Ako $x, y \in B$ i $x + y = y$, pisaćemo $x \leq y$. Supremum elemenata $\{x_i \mid i \in I\}$ (ako postoji) označavaćemo sa $\sum \{x_i \mid i \in I\}$. Sa $\prod \{x_i \mid i \in I\}$ označavaćemo infimum (ako postoji) elemenata $\{x_i \mid i \in I\}$.

Ako je X skup, lako je videti da je algebra $\mathcal{B}(X) = \langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^-, \emptyset, X \rangle$ Booleova algebra.

Definicija 1.12 *Neka je X skup. Svaku podalgebru od $\mathcal{B}(X)$ zovemo* **Booleova skupovna algebra**.

Teorema 1.22 *(M. H. Stone) Svaka BA je izomorfna sa nekom Booleovom skupovnom algebrom.*

Dokaz prethodnog tvrdjenja može se naći u [9].

Definicija 1.13 *(a) Neka je $\mathcal{B}$ Booleova algebra. Za element $a \in B$ kažemo da je* **atom** *ako je $a \neq 0$ i za sve $x \in B$ važi $x \cdot a = 0$ ili $x \cdot a = a$. Skup svih atoma algebre $\mathcal{B}$ obeležavamo sa $\mathrm{At}_{\mathcal{B}}$.*

(b) Za Booleovu algebru $\mathcal{B}$ kažemo da je **atomarna** *ako za svaki element $0 \neq x \in B$ postoji atom a tako da je $a \leq x$.*

(c) *Booleova algebra $\mathcal{B}$ je* **kompletna** *ako za sve $X \subseteq B$ postoji supremum i infimum od X u $\mathcal{B}$.*

U kompletnoj atomarnoj Booleovoj algebri $\mathcal{B}$ za svaki element x važi

$$x = \sum \{a \in At_{\mathcal{B}} \mid a \leq x\}.$$

Iz prethodne teoreme dobijamo

Teorema 1.23 *Svaka BA se može potopiti u kompletnu i atomarnu Booleovu algebru.*

Definicija 1.14 *Neka je $\mathcal{B}$ Booleova algebra i $f : B^n \to B$. Tada*

(1) *Kažemo da je f* **operator** *ako je f aditivan po svakom svom argumentu tj.*

$$f(x_1, \ldots, \sum\{y_i \mid i \leq k\}, \ldots, x_n) = \sum\{f(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n) \mid i \leq k\}.$$

(2) *Operator f je* **kompletno aditivan** *ako za svaki indeksni skup I za koji postoji $\sum\{y_i \mid i \in I\}$ u $\mathcal{B}$ važi*

$$f(x_1, \ldots, \sum\{y_i \mid i \in I\}, \ldots, x_n) = \sum\{f(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n) \mid i \in I\}.$$

(3) *Operator f je* **normalan** *ako za sve $a_1, \ldots, a_n \in B$ važi*

ako postoji $k \leq n$ tako da je $a_k = 0$ onda $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

Definicija 1.15 *Za algebru $\mathcal{B} = \langle B, +, \cdot, ', 0, 1, \{f_j \mid j \in J\}\rangle$ kažemo da je* **Booleova algebra sa operatorima** *(ubuduće BAO) ako je redukt $\mathcal{B}l(\mathcal{B}) = \langle B, +, \cdot, ', 0, 1\rangle$ Booleova algebra i sve operacije f_j, $j \in J$, su operatori Booleove algebre $\mathcal{B}l(\mathcal{B})$. Reći ćemo da je $\mathcal{B}$* **atomarna BAO** *sa operatorima ako je $\mathcal{B}l(\mathcal{B})$ atomarna BA. Sa $At_{\mathcal{B}}$ označavamo skup atoma algebre $\mathcal{B}l(\mathcal{B})$. Za $\mathcal{B}$ kažemo da je* **kompletna BAO**, *ako je $\mathcal{B}l(\mathcal{B})$ kompletna BA i svi operatori algebre $\mathcal{B}$ su kompletno aditivni. Za $\mathcal{B}$ kažemo da je* **normalna BAO** *ako su svi operatori algebre $\mathcal{B}$ normalni. Kompletnu, normalnu i atomarnu BAO zovemo* **dobra BAO**.

Primer 1.2 **Algebra zatvorenja** *je Booleova algebra sa unarnom operacijom (operatorom zatvorenja)* f *za koju važi:* $f(0) = 0$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *(tj.* f *je normalni operator Booleove algebre) i* $x \leq f(x) = f(f(x))$. *Dakle, svaka algebra zatvorenja je BAO. Varijetet algebri zatvorenja označavaćemo sa* V_{cl}.

Primer 1.3 **Relaciona algebra** *je Booleova algebra* $\mathcal{A}$ *sa binarnom operacijom* $\circ$, *unarnom operacijom* $^{-1}$ *i konstantom* $1'$ *u kojoj važi*

(1) $\langle A, \circ, 1' \rangle$ *je monoid.*

(2) Za sve $a, b, c \in A$: $(a \circ b) \wedge c = 0 \iff (a^{-1} \circ c) \wedge b = 0 \iff (c \circ b^{-1}) \wedge a = 0$.

Do relacionih algebri došlo se apstrakcijom, na osnovu raznih osobina binarnih relacija. Klasa relacionih algebri je varijetet Booleovih algebri sa operatorima. Taj varijetet označavamo sa *RA*.

Primer 1.4 **Normalna modalna algebra** *je Booleova algebra sa jednim unarnim normalnim operatorom. Normalne modalne algebre daju algebarsku semantiku za tzv. normalne modalne logike. Varijetet normalnih modalnih algebri označavaćemo sa* V_{ma}.

Za Booleove algebre sa operatorima važi sledeće tvrdjenje

Teorema 1.24 *(1) Svaka BAO se može potopiti u kompletnu i atomarnu BAO.*

(2) Svaka normalna BAO se može potopiti u dobru BAO.

Algebra kompleksa bilo koje relacijske strukture je BAO. Štaviše, važi sledeće tvrdjenje

Teorema 1.25 *Algebra kompleksa svake relacijske strukture je dobra BAO.*

Dokaz. Direktno iz definicije algebre kompleksa sledi da je njen Booleov redukt kompletna i atomarna Booleova algebra. Nije teško pokazati da su dodatne operacije normalni i kompletno aditivni operatori pomenute Booleove algebre.
□

Dokazaćemo da važi i obrnuto, tj. svaka dobra BAO je algebra kompleksa neke relacijske strukture, što je u stvari tvrdjenje već pomenute teoreme Jónssona i Tarskog.

Definicija 1.16 *Neka je $\mathcal{B}$ kompletna i atomarna BAO sa skupom operatora $\mathcal{F}$.* **Atomična struktura** *algebre $\mathcal{B}$, u oznaci $\mathcal{A}t_{\mathcal{B}}$, jeste relacijska struktura sa nosačem $At_{\mathcal{B}}$ i skupom relacija $\{\hat{f} \mid f \in F\}$, koje su definisane na sledeći način: ako $f : B^n \to B$ onda je $\hat{f} \subseteq B^{n+1}$ tako da za sve $b_1, \ldots, b_n, a \in At_{\mathcal{B}}$ važi*

$$(b_1, \ldots, b_n, a) \in \hat{f} \iff a \leq f(b_1, \ldots, b_n).$$

Teorema 1.26 *Svaka dobra BAO jeste algebra kompleksa svoje atomične strukture.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{B} = \langle B, +, \cdot, ', 0, 1, \mathcal{F} \rangle$ dobra BAO. Definišimo preslikavanje $\psi : B \to \mathcal{P}(At_{\mathcal{B}})$ na sledeći način: za sve $b \in B$

$$\psi(b) = \{a \in At_{\mathcal{B}} \mid a \leq b\}.$$

Dokazaćemo da je ovo preslikavanje izomorfizam algebre $\mathcal{B}$ i algebre kompleksa njene atomične strukture.

Da je ψ bijekcija sledi na osnovu napomene iza Definicije 1.13. Treba još pokazati da za svaki n-arni operator f algebre $\mathcal{B}$ i za sve $b_1, \ldots, b_n \in B$ važi

$$\psi(f(b_1, \ldots, b_n)) = \hat{f}^{\uparrow}(\psi(b_1), \ldots, \psi(b_n)).$$

Ako je $b_i = 0$ za neko $i \leq n$, onda gornja jednakost očigledno važi na osnovu normalnosti operatora f i Definicije 1.10. U slučaju da je $b_i \neq 0$ za sve $i \leq n$, dokazaćemo oba smera jednakosti.
$(\subseteq)$
Neka $a \in \psi(f(b_1, \ldots, b_n))$. Tada

$$a \in At_{\mathcal{B}} \text{ i } a \leq f(b_1, \ldots, b_n). \tag{1.5}$$

treba dokazati $a \in \hat{f}^{\uparrow}(\psi(b_1), \ldots, \psi(b_n))$, što je ekvivalentno sa

$$a \in At_{\mathcal{B}} \text{ i } (\forall i \leq n)(\exists x_i \in \psi(b_i))\ (x_1, \ldots, x_n, a) \in \hat{f},$$

odnosno,

$$a \in At_{\mathcal{B}} \text{ i } (\forall i \le n)(\exists x_i \in \psi(b_i))\; a \le f(x_1,\dots,x_n). \tag{1.6}$$

Pošto je $\mathcal{B}$ kompletna i atomarna BAO, znamo da je $b_i = \sum \psi(b_i)$, za sve $i \le n$, pa je

$$a \le f(\sum \psi(b_1),\dots,\sum \psi(b_n)).$$

Pošto su $b_i \ne 0$ za sve i, imamo da je $\psi(b_i) \ne \emptyset$, za sve $i \le n$. Neka je $\psi(b_j) = \{x_{jk} \mid k \in I_j\}$. f je kompletno aditivan operator, pa je

$$f(\sum \psi(b_1),\dots,\sum \psi(b_n)) = \sum\{f(x_{1k_1},\dots,x_{nk_n}) \mid k_j \in I_j, j \in \{1,\dots,n\}\}.$$

Pošto je a atom, mora biti $a \cdot f(x_{1k_1},\dots,x_{nk_n}) = a$ ili $a \cdot f(x_{1k_1},\dots,x_{nk_n}) = 0$. Medjutim, ako bi uvek važila druga od poslednje dve jednakosti, tada bi bilo

$$a \cdot f(b_1,\dots,b_n) = a \cdot \sum\{f(x_{1k_1},\dots,x_{nk_n}) \mid k_j \in I_j, j \in \{1,\dots,n\}\} =$$

$$\sum a \cdot \{f(x_{1k_1},\dots,x_{nk_n}) \mid k_j \in I_j, j \in \{1,\dots,n\}\} = 0,$$

što je u kontradikciji sa (1.5). Prema tome, dokazali smo da postoje $x_i \in \psi(b_i)$ takvi da je $a \le f(x_1,\dots,x_n)$.
$(\supseteq)$
Neka sada $a \in \hat{f}^{\uparrow}(\psi(b_1),\dots,\psi(b_n))$. Tada važi (1.6). Iz $x_i \in \psi(b_i)$ sledi $x_i \le b_i$. Na osnovu aditivnosti operatora f lako je pokazati njegovu monotonost, pa iz $a \le f(x_1,\dots,x_n)$ sledi $a \le f(b_1,\dots,b_n)$, odnosno

$$a \in \psi(f(b_1,\dots,b_n)).$$

□

1.7 Varijeteti algebri kompleksa

Neka je K klasa (istotipnih) relacijskih struktura i K^+ je zatvorenje u odnosu na izomorfizam klase algebri $\{\mathfrak{S}^+ \mid \mathfrak{S} \in K\}$. Označimo sa V_K najmanji varijetet koji sadrži K^+, tj. $V_K = HSPK^+$. Pokazalo se da je u mnogim slučajevima $V_K = SK^+$, ili, ako krenemo od algebri, mnogi važni varijeteti mogu da se reprezentuju preko algebri kompleksa relacijskih struktura. Pri tome, ako je $V = SK^+$ za neku klasu K, čest je slučaj da se radi o elementarnoj klasi. U skladu s tim imamo sledeću definiciju.

Definicija 1.17 *Varijetet V Booleovih algebri sa operatorima je* **kompleksni varijetet** *ako je $V = SK^+$ za neku klasu relacijskih struktura K.*

Primer 1.5 *Varijetet V_{cl} (Primer 1.2) je kompleksni varijetet, jer su Jónsson i Tarski ([26]) pokazali da je $V_{cl} = SK^+_{qo}$, gde je K_{qo} klasa kvazi-uredjenja (tj. klasa struktura (X,R) gde je R refleksivna i tranzitivna relacija). Isto tako je $V_{cl} = SK^+_{po}$, gde je K_{po} klasa parcijalnih uredjenja. Takodje, pokazuje se da je $V_{cl} = V_{K_{fqo}}$, gde je K_{fqo} klasa konačnih kvazi-uredjenja.*

Primer 1.6 *Varijetet RA (varijetet relacionih algebri, Primer 1.3) je kompleksni varijetet. Naime, S. D. Comer u [11] pokazuje da se svaka relaciona algebra može potopiti u algebru kompleksa neke poli-grupe (poli-grupe su poli-algebre koje predstavljaju prirodno uopštenje grupa). Važi i obrat: algebra kompleksa poli-grupe je relaciona algebra. Videli smo u prethodnom odeljku da su algebre kompleksa poli-algebri u stvari algebre kompleksa nekih relacijskih struktura, odakle sledi da je RA kompleksni varijetet.*

Varijetete algebri kompleksa izučava R. Goldblatt u [19]. Polaznu tačku za njegova razmatranja predstavljaju modalne logike i njima odgovarajuće normalne modalne algebre (Primer 1.4).

U jeziku modalne logike, formule se grade pomoću iskaznih slova iz skupa Π, uobičajenih veznika $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\neg$ i dodatnog (unarnog) veznika $\Diamond$, ("possibly"). Takodje koristimo i njemu dualni veznik $\Box$ ("necessarily") kao zamenu za $\neg\Diamond\neg$.

Algebarsku semantiku za ovaj jezik daju nam algebre $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B}, f \rangle$ koje se sastoje od Booleove algebre $\mathcal{B}$ sa jednom dodatnom unarnom funkcijom f. Svaka modalna formula ϕ indukuje termovsku funkciju na $\mathcal{A}$ (označićemo je takodje sa ϕ), pri čemu standardne veznike interpretiramo na uobičajeni način, a veznik $\Diamond$ interpretiramo kao f. Reći ćemo da ϕ **važi na** $\mathcal{A}$ (u oznaci $\mathcal{A} \models \phi$) ako je $\phi \approx 1$ identitet koji važi u algebri $\mathcal{A}$.

Semantika koja potiče od Kripkea zasniva se na strukturama $\mathfrak{S} = \langle X, R \rangle$, pri čemu je R binarna relacija na X. Uobičajeni naziv za ovakvu strukturu (u ovom kontekstu) je **okvir**. Model na $\mathfrak{S}$ je uredjeni par $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{S}, V \rangle$, gde $V : \Pi \to \mathcal{P}(X)$. Intuitivno, za $\pi \in \Pi$, $V(\pi)$ je skup tačaka u kojima je π "istinito". Sada induktivno definišemo tačnost formule ϕ u tački x u modelu $\mathfrak{M}$ (u oznaci $\mathfrak{M} \models_x \phi$), pri čemu je

$$\mathfrak{M} \models_x \Diamond\phi \text{ ako i samo ako } (\exists y)((x,y) \in R \ \& \ \mathfrak{M} \models_y \phi).$$

Formula ϕ važi na $\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{S} \models \phi$) ako je ϕ tačna u svakoj tački u svakom modelu na $\mathfrak{S}$.

Ako je $\mathfrak{S}$ okvir, tada $\mathfrak{S}^+$ pripada varijetetu V_{ma} (varijetet normalnih modalnih algebri, Primer 1.4). Pri tome, može se pokazati da na $\mathfrak{S}$ i $\mathfrak{S}^+$ važe iste modalne formule. Dakle, formula koja važi na svim normalnim modalnim algebrama važi i na svim okvirima. Tačno je i obrnuto, s obzirom na to da su Jónsson i Tarski pokazali da je $V_{ma} = SK_{fr}^+$, gde je K_{fr} klasa svih okvira.

Definicija 1.18 **Normalna modalna logika** *je skup formula* Λ *koji sadrži sve tautologije i posledice šeme*

$$\Box(\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\Box\phi \Rightarrow \Box\psi),$$

zatvoren je u odnosu na modus ponens, pravilo zamene za iskazna slova i ima sledeće svojstvo: ako $\phi \in \Lambda$ *tada* $\Box\phi \in \Lambda$.

Presek bilo koje kolekcije normalnih modalnih logika je normalna modalna logika. Dakle, za svaki skup formula Γ, postoji najmanja normalna modalna logika $Cons(\Gamma)$ koja sadrži Γ.

Ako je $C \subseteq V_{ma}$, sa $Th(C)$ označavamo skup modalnih formula koje važe na svim algebrama iz C. Pri tome, može se pokazati da je $Th(C)$ normalna logika. S druge strane, ako je Γ skup formula, tada sa $Mod(\Gamma)$ označavamo klasu normalnih algebri na kojima važe sve formule iz Γ. Dakle, $Mod(\Gamma)$ je podvarijetet varijeteta V_{ma} odredjen identitetima $\phi \approx 1$, $\phi \in \Gamma$. Štaviše, lako se vidi da je $Mod(\Gamma) = Mod(Cons(\Gamma))$.

Poznato je da je svaki modalno-algebarski identitet ekvivalentan identitetu oblika $\phi \approx 1$, za neku modalnu formulu ϕ. Odatle sledi da svaki varijetet normalnih algebri može biti predstavljen u obliku $Mod(\Lambda)$ za neku normalnu logiku

Λ. To znači da je sa $\Lambda \mapsto Mod(\Lambda)$ dato preslikavanje mreže normalnih logika na mrežu podvarijeteta varijeteta V_{ma} koje ima osobinu: $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 \Rightarrow Mod(\Lambda_2) \subseteq Mod(\Lambda_1)$. Osim toga, može se pokazati da je $\Lambda = Cons(Mod(\Lambda))$ (dokaz tog tvrdjenja je netrivijalan). Na osnovu svega toga sledi

Teorema 1.27 *Mreža normalnih modalnih logika je anti-izomorfna mreži podvarijeteta varijeteta V_{ma}.*

Slična pitanja možemo postaviti o odnosu normalnih logika i klasa okvira. Ako je K klasa okvira, sa $Th(K)$ označavamo skup svih formula koje važe na svim strukturama iz K i taj skup je normalna logika. S druge strane, za svaki skup formula Γ, sa $Fr(\Gamma)$ označavamo skup okvira na kojima važe sve formule iz Γ. Pri tome, lako je pokazati da je $Fr(\Gamma) = Fr(Cons(\Gamma))$.

Za klasu okvira K kažemo da je **modalno-aksiomatska** ako je $K = Fr(\Lambda)$ za neku normalnu logiku Λ. Nije teško videti da tada mora biti $K = Fr(Th(K))$. S obzirom da je $V_K = Mod(Th(K))$, dobijamo da $\mathfrak{S}^+ \in V_K$ ako i samo ako $\mathfrak{S} \in Fr(Th(K))$. To nam daje sledeću algebarsku karakterizaciju modalno-aksiomatskih klasa: klasa K je modalno-aksiomatska ako i samo ako se sve algebre kompleksa iz V_K nalaze u K^+.

Veoma je značajno i pitanje kompletnosti normalnih logika. Naime, kažemo da je normalna logika Λ **kompletna** ako je ona odredjena nekom klasom okvira, tj. ako je $\Lambda = Th(K)$ za neku klasu K. Ovo pitanje dovešće nas do kanoničkih i kompletnih varijeteta, što ćemo objasniti nešto kasnije.

Struktura normalnih modalnih algebri (Booleove algebre sa jednim normalnim operatorom) odredjuje nam osnovni tip struktura koje razmatramo dalje u tekstu; to su relacijske strukture sa jednom relacijom i njihove algebre kompleksa. Lako je videti da rezultati dobijeni na ovaj način važe i za proizvoljne relacijske strukture i njihove algebre kompleksa.

U daljem tekstu, pod algebrom $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B}, f \rangle$ podrazumevamo Booleovu algebru $\mathcal{B}$ sa normalnim (n-arnim) operatorom f.

Definicija 1.19 **Kanonička struktura** *algebre $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B}, f \rangle$ je relacijska struktura*

$$\mathcal{C}_S(\mathcal{A}) = \langle X_{\mathcal{B}}, R_f \rangle,$$

gde je $X_{\mathcal{B}}$ skup ultrafiltera algebre $\mathcal{B}$, a relacija R_f je definisana na sledeći način: ako je f n-arni operator, tada $(F_1,\dots,F_n,F) \in R_f$ ako i samo ako za sve $x_1 \in F_1,\dots,x_n \in F_n$ važi $f(x_1,\dots,x_n) \in F$.

Definicija 1.20 **Kanonička E-algebra** *(od "canonical embedding algebra") algebre $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B}, f\rangle$ je algebra*

$$\mathcal{E}m(\mathcal{A}) = (\mathcal{C}_S(\mathcal{A}))^+ = \langle \mathcal{B}(X_{\mathcal{B}}), R_f^{\uparrow}\rangle.$$

Svaka algebra $\mathcal{A}$ može se potopiti u algebru $\mathcal{E}m(\mathcal{A})$. Naime, preslikavanje $\psi : B \to \mathcal{P}(X_{\mathcal{B}})$ definisano sa

$$\psi(x) = \{F \in X_{\mathcal{B}} \mid x \in F\}$$

je injektivni homomorfizam.

Definicija 1.21 **Kanonička ekstenzija** *strukture $\mathfrak{S} = \langle X, R\rangle$ je struktura*

$$\mathcal{C}_e(\mathfrak{S}) = \mathcal{C}_S(\mathfrak{S}^+) = \langle X_{\mathcal{B}(X)}, R_{R^{\uparrow}}\rangle.$$

Kao što znamo, varijeteti su klase algebri zatvorene u odnosu na formiranje homomorfnih slika, podalgebri i direktnih proizvoda. Pošto su razmatranja iz ovog odeljka zasnovana na vezi izmedju relacijskih struktura i varijeteta odgovarajućih algebri kompleksa, potrebno je uvesti operacije sa klasama relacijskih struktura koje su dualne ovim osnovnim algebarskim operatorima.

Definicija 1.22 *Neka su $\mathfrak{S}_1 = \langle X_1, R_1\rangle$ i $\mathfrak{S}_2 = \langle X_2, R_2\rangle$ relacijske strukture, gde su R_1 i R_2 relacije arnosti $n+1$. Preslikavanje $\varphi : X_1 \to X_2$ je* **b-morfizam** *(od "bounded morphism") ako i samo ako za sve $y_1,\dots,y_n \in X_2$, $z \in X_1$ važi:*

$$(y_1,\dots,y_n,\varphi(z)) \in R_2 \iff$$

$$(\exists x_1,\dots,x_n \in X_1)\,((x_1,\dots,x_n,z) \in R_1 \& (\forall i \le n) y_i = \varphi(x_i)).$$

Nije teško pokazati da je bijektivni b-morfizam izomorfizam relacijskih struktura. Surjektivni b-morfizam zvaćemo b-epimorfizmom.

Definicija 1.23 *Struktura* $\mathfrak{S}_1 = \langle X_1, R_1\rangle$ *je* **unutrašnja podstruktura** *strukture* $\mathfrak{S}_2 = \langle X_2, R_2\rangle$*, ako je* $X_1 \subseteq X_2$ *i funkcija inkluzije skupa* X_1 *u* X_2 *je b-morfizam.*

Definicija 1.24 *Neka je* $\{\mathfrak{S}_i = \langle X_i, R_i\rangle \mid i \in I\}$ *klasa struktura, gde su* R_i *relacije arnosti* $n+1$. **Disjunktna unija** $\sum_i \mathfrak{S}_i$ *je struktura* $\langle \sum_i X_i, R\rangle$*, gde je*

$$\sum_i X_i = \{(x,i) \mid i \in I, x \in X_i\} = \cup_i (X_i \times \{i\}),$$

$$R = \{((x_0,i),\ldots,(x_n,i)) \mid i \in I, (x_0,\ldots,x_n) \in R_i\}.$$

Da su ovi operatori na neki način dualni odgovarajućim operatorima na klasama algebri, pokazuju sledeća tvrdjenja.

Teorema 1.28

(a) *Ako je struktura* $\mathfrak{S}_1$ *izomorfna unutrašnjoj podstrukturi strukture* $\mathfrak{S}_2$*, tada je* $\mathfrak{S}_1^+$ *homomorfna slika algebre* $\mathfrak{S}_2^+$.

(b) *Ako je struktura* $\mathfrak{S}_2$ *b-morfna slika strukture* $\mathfrak{S}_1$*, tada je* $\mathfrak{S}_2^+$ *izomorfna podalgebri algebre* $\mathfrak{S}_1^+$.

(c) *Ako je algebra* $\mathcal{A}_1$ *izomorfna podalgebri algebre* $\mathcal{A}_2$*, tada je* $\mathcal{C}_S(\mathcal{A}_1)$ *b-morfna slika strukture* $\mathcal{C}_S(\mathcal{A}_2)$.

(d) *Ako je algebra* $\mathcal{A}_2$ *homomorfna slika algebre* $\mathcal{A}_1$*, tada je* $\mathcal{C}_S(\mathcal{A}_2)$ *izomorfna unutrašnjoj podstrukturi strukture* $\mathcal{C}_S(\mathcal{A}_1)$.

Dokaz. Nećemo dati kompletan dokaz, nego samo osnovnu ideju. Za *(a)* i *(b)*, ako je φ odgovarajući b-morfizam, u dokazu koristimo homomorfizam $\varphi_+ : \mathcal{P}(X_2) \to \mathcal{P}(X_1)$ definisan sa: $\varphi_+(X) = \varphi^{-1}(X)$. Za *(c)* i *(d)*, ako je θ odgovarajući homomorfizam, on indukuje b-morfizam $\theta_+ : X_{\mathcal{B}_2} \to X_{\mathcal{B}_1}$ definisan sa: $\theta_+(F) = \theta^{-1}(F)$. □

Kao posledicu ove teoreme dobijamo

Posledica 1.6

(a) Ako je struktura $\mathfrak{S}_1$ izomorfna unutrašnjoj podstrukturi strukture $\mathfrak{S}_2$, tada je $\mathcal{C}_e(\mathfrak{S}_1)$ izomorfna unutrašnjoj podstrukturi strukture $\mathcal{C}_e(\mathfrak{S}_2)$.

(b) Ako je struktura $\mathfrak{S}_2$ b-morfna slika strukture $\mathfrak{S}_1$, tada je $\mathcal{C}_e(\mathfrak{S}_2)$ b-morfna slika strukture $\mathcal{C}_e(\mathfrak{S}_1)$.

(c) Ako je algebra $\mathcal{A}_1$ izomorfna podalgebri algebre $\mathcal{A}_2$, tada je $\mathcal{E}m(\mathcal{A}_1)$ izomorfna podalgebri algebre $\mathcal{E}m(\mathcal{A}_2)$.

(d) Ako je algebra $\mathcal{A}_2$ homomorfna slika algebre $\mathcal{A}_1$, tada je $\mathcal{E}m(\mathcal{A}_2)$ homomorfna slika algebre $\mathcal{E}m(\mathcal{A}_1)$.

Teorema 1.29 *Neka je $\{\mathfrak{S}_i = \langle X_i, R_i\rangle \mid i \in I\}$ klasa relacijskih struktura. Tada je $(\sum_i \mathfrak{S}_i)^+ \cong \prod_i \mathfrak{S}_i^+$.*

Dokaz. Za svako $j \in I$, funkcija $\varphi_j : x \mapsto (x, j)$ je injektivni b-morfizam $\mathfrak{S}_j \to \sum_i \mathfrak{S}_i$. Ove funkcije indukuju surjektivne homomorfizme $\varphi_{j+} : (\sum_i \mathfrak{S}_i)^+ \to \mathfrak{S}_j^+$, iz dokaza Teoreme 1.28. Dalje, ovi homomorfizmi odredjuju homomorfizam $\theta : (\sum_i \mathfrak{S}_i)^+ \to \prod_i \mathfrak{S}_i^+$ dat sa

$$\theta(Y)(j) = \varphi_{j+}(Y) = \varphi_j^{-1}(Y) = \{y \in X_j \mid (y, j) \in Y\}.$$

Lako je pokazati da je ovaj homomorfizam bijekcija.
□

Iz poslednje teoreme sledi da, ako je klasa K zatvorena u odnosu na disjunktne unije, tada je $PK^+ = K^+$. Dakle, da bismo odredili kada je SK^+ varijetet, treba ispitati kada je ta klasa algebri zatvorena u odnosu na homomorfne slike. Koristeći gore opisanu dualnost može se dokazati sledeće tvrdjenje.

Teorema 1.30 *Neka je K klasa struktura zatvorena u odnosu na kanoničke ekstenzije. Ako je klasa K zatvorena u odnosu na b-epimorfne slike, unutrašnje podstrukture i disjunktne unije, onda je SK^+ varijetet.*

Uslovi iz ove teoreme su dovoljni, ali ne i neophodni. Na primer, klasa K beskonačnih kvazi-uredjenja je zatvorena u odnosu na kanoničke ekstenzije i važi da je SK^+ varijetet algebri zatvaranja. Medjutim, ova klasa nije zatvorena u odnosu na b-epimorfne slike i unutrašnje podstrukture.

Da bismo dobili potrebne uslove, uvodimo klasu K_S definisanu sa

$$K_S = \{\mathfrak{S} \mid \mathfrak{S}^+ \in SK^+\}.$$

Koristeći Teoremu 1.30 i imajući u vidu da je $SK^+ = SK_S^+$, dobijamo

Teorema 1.31 *Neka je klasa K_S zatvorena u odnosu na kanoničke ekstenzije. Tada je SK^+ varijetet ako i samo ako je klasa K_S zatvorena u odnosu na unutrašnje podstrukture i disjunktne unije.*

Primetimo da zatvorenost klase K_S u odnosu na kanoničke ekstenzije ne povlači zatvorenost klase K u odnosu na kanoničke ekstenzije. Tako, videli smo (Primer 1.2) da je $SK_{qo}^+ = SK_{po}^+ = V_{cl}$. Može se pokazati da je $(K_{po})_S = K_{qo}$. Medjutim, klasa K_{qo} je zatvorena u odnosu na kanoničke ekstenzije, a K_{po} nije.

Osim kompleksnih varijeteta, bavićemo se i kanoničkim varijetetima.

Definicija 1.25 *Klasa algebri je* **kanonička klasa** *ako je zatvorena u odnosu na kanoničke E-algebre.*

Prirodno, varijetet koji je istovremeno i kanonička klasa algebri zovemo **kanoničkim varijetetom**. Već smo pomenuli da su kanonički varijeteti povezani sa problemom kompletnosti normalnih modalnih logika. Naime, kažemo da je normalna logika Λ kompletna ako je $\Lambda = Th(K)$ za neku klasu okvira K. Ovo je opet vezano za takozvanu **algebru Lindenbauma** logike Λ. Elementi ove algebre (označavamo je sa $\mathcal{A}_\Lambda$) su klase ekvivalencije formula u odnosu na relaciju $(\phi \Leftrightarrow \psi) \in \Lambda$. Ona ima osobinu da na njoj važe samo formule iz Λ, tj. $Th(\mathcal{A}_\Lambda) = \Lambda$. Osim toga, algebra Lindenbauma je slobodna algebra varijeteta $Mod(\Lambda)$.

Normalnoj logici Λ takodje možemo pridružiti takozvani **kanonički okvir** $\mathfrak{S}_\Lambda$, koji je izomorfan kanoničkoj strukturi algebre $\mathcal{A}_\Lambda$. Poznato je da za kanonički okvir važi $Th(\mathfrak{S}_\Lambda) \subseteq \Lambda$, tako da, ako želimo da pokažemo da je logika Λ odredjena klasom K njenih okvira, dovoljno je pokazati da $\mathfrak{S}_\Lambda \in K$. Ovaj metod se često koristi u dokazivanju kompletnosti u modalnoj logici.

Dakle, osnovno pitanje ovde je da li $\mathcal{C}_S(\mathcal{A}_\Lambda) \in Fr(\Lambda)$, što je ekvivalentno pitanju da li $(\mathcal{C}_S(\mathcal{A}_\Lambda))^+ = \mathcal{E}m(\mathcal{A}_\lambda)$ pripada varijetetu $Mod(\Lambda)$. Kako mi možemo posmatrati verzije algebre Lindenbauma za bilo koju (beskonačnu) kardinalnost skupa iskaznih slova i zahtevati da se njihove kanoničke E-algebre nadju u varijetetu $Mod(\Lambda)$, pitanje se svodi na to da li se kanoničke E-algebre svih beskonačno generisanih slobodnih algebri varijeteta $Mod(\Lambda)$ nalaze u $Mod(\Lambda)$. Ovo poslednje biće ispunjeno ako i samo ako je $Mod(\Lambda)$ kanonički varijetet, u skladu sa Definicijom 1.25.

Vezu izmedju kanoničkih i kompleksnih varijeteta daje sledeće tvrdjenje

Teorema 1.32 *Svaki kanonički varijetet je kompleksni varijetet.*

Dokaz. Neka je V kanonički varijetet i $K = \{\mathcal{C}_S(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \in V\}$. Pošto je V kanonička klasa, $(\mathcal{C}_S(\mathcal{A}))^+ = \mathcal{E}m(\mathcal{A})$ je u V, što znači da je $SK^+ \subseteq V$. Medjutim, kako za sve $\mathcal{A} \in V$ postoji potapanje u $\mathcal{E}m(\mathcal{A})$, sledi da je $V = SK^+$.
□

Nije poznato da li postoje kompleksni varijeteti koji nisu kanonički.

Rezultati iz Teorema 1.30 i 1.31 mogu biti pojačani na sledeći način

Teorema 1.33 *(1) Ako je klasa K zatvorena u odnosu na kanoničke ekstenzije, b-epimorfne slike, unutrašnje podstrukture i disjunktne unije, tada je SK^+ kanonički varijetet.*

(2) SK^+ je kanonički varijetet ako i samo ako je klasa K_S zatvorena u odnosu na kanoničke ekstenzije, unutrašnje podstrukture i disjunktne unije.

Uslovi iz prethodnih tvrdjenja postaju nešto jednostavniji kada razmatramo elementarne klase relacijskih struktura. Ustvari, od posebnog interesa su (nešto opštije) klase koje su zatvorene u odnosu na ultrastepene.

Teorema 1.34 *Za svaku relacijsku strukturu $\mathfrak{S}$ postoji ultrastepen $\mathfrak{T}$ od $\mathfrak{S}$ takav da je $\mathcal{C}_e(\mathfrak{S})$ b-epimorfna slika strukture $\mathfrak{T}$.*

Sada se tvrdjenja o kompleksnim varijetetima mogu ovako formulisati

Teorema 1.35 *Neka je klasa K zatvorena u odnosu na ultrastepene.*

(1) Ako je klasa K zatvorena u odnosu na b-epimorfne slike, unutrašnje podstrukture i disjunktne unije, tada je SK^+ kanonički varijetet.

(2) SK^+ je kanonički varijetet ako i samo ako je klasa K_S zatvorena u odnosu na unutrašnje podstrukture i disjunktne unije.

Sledeća teorema daje vezu izmedju ultraproizvoda i algebri kompleksa.

Teorema 1.36 *Neka je $\{\mathfrak{S}_i \mid i \in I\}$ familija relacijskih struktura i U ultrafilter na I. Tada postoji potapanje algebre $\prod_i \mathfrak{S}_i^+/U$ u $(\prod_i \mathfrak{S}_i/U)^+$.*

Dokaz. Preslikavanje $\varphi : \prod_i \mathcal{P}(X_i)/U \to \mathcal{P}(\prod_i X_i/U)$ definisano sa

$$\alpha/U \in \varphi(a/U) \iff \{i \in I \mid \alpha(i) \in a(i)\} \in U$$

je dobro definisan injektivni homomorfizam.
□

Primetimo da je prethodno tvrdjenje uopštenje Teoreme 1.5. Ovo tvrdjenje se koristi u dokazu sledeće (veoma važne) teoreme

Teorema 1.37 *Ako je klasa K zatvorena u odnosu na ultraproizvode (na primer, ako je K elementarna klasa), tada je V_K kanonički varijetet.*

Treća važna klasa varijeteta Booleovih algebri sa operatorima su kompletni varijeteti.

Definicija 1.26 *Varijetet V je* **kompletan varijetet** *ako je $V = V_K$ za neku klasu K relacijskih struktura.*

Do pojma kompletnog varijeteta dolazi se iz algebarske verzije kompletnosti normalnih logika. Naime, ako je Λ kompletna normalna logika, onda je $\Lambda = Th(Fr(\Lambda))$, ili, ekvivalentno tome, $Mod(\Lambda) = Mod(Th(Fr(\Lambda)))$. Medjutim, klasa $Fr(\Lambda)$ odredjuje istu logiku kao i $Fr(\Lambda)^+$, a ova logika odredjuje varijetet generisan klasom $Fr(\Lambda)^+$, tj. varijetet $V_{Fr(\Lambda)}$. Dakle, Λ je kompletna logika ako i samo ako je $Mod(\Lambda)$ kompletan varijetet u smislu Definicije 1.26.

Ako je $V = SK^+$, onda je očigledno $V = V_K$. Prema tome, svaki kompleksni varijetet je kompletan. S druge strane, može se pokazati da postoje kompletni varijeteti koji nisu kompleksni. Ipak, ako nametnemo odredjene uslove na klasu K, ova dva pojma postaju ekvivalentna. Te uslove ćemo izraziti u terminima klase $At(V) = \{\mathfrak{S} \mid \mathfrak{S}^+ \in V\}$.

Teorema 1.38 *Varijetet V je kanonički ako i samo ako je V kompletan varijetet i klasa $At(V)$ je zatvorena u odnosu na kanoničke ekstenzije.*

Teorema 1.39 *Ako je klasa $At(V)$ zatvorena u odnosu na ultrastepene, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(1) V je kompletan varijetet;
(2) V je kompleksni varijetet;
(3) V je kanonički varijetet.

Poslednje tvrdjenje koje ćemo navesti odnosi se na klase koje predstavljaju uopštenje ranije pomenutih modalno-aksiomatskih klasa okvira.

Definicija 1.27 *Kažemo da klasa K* **reflektuje kanoničke ekstenzije** *ako iz $\mathcal{C}_e(\mathfrak{S}) \in K$ sledi $\mathfrak{S} \in K$.*

Teorema 1.40 *(1) Ako je $K = At(V_K)$, onda je klasa K zatvorena u odnosu na b-epimorfne slike, unutrašnje podstrukture i disjunktne unije, i reflektuje kanoničke ekstenzije.*

(2) Neka je klasa K zatvorena u odnosu na kanoničke ekstenzije ili u odnosu na ultrastepene. Tada je $K = At(V_K)$ ako je K zatvorena u odnosu na b-epimorfne slike, unutrašnje podstrukture i disjunktne unije, i reflektuje kanoničke ekstenzije.

1.8 Stepenovanje relacija

Mnoga pitanja o algebrama kompleksa ne mogu biti rešena ako se oslanjamo samo na stepenovanje operacija algebre. Naime, potrebno je pronaći način da se i relacije ”podignu” sa skupa na njegov partitivni skup. Na primer, prirodno je postaviti pitanje da li je algebra kompleksa faktor algebre u odnosu na neku kongruenciju faktor algebra algebre kompleksa, ali odgovor ne možemo dati bez stepenovanja kongruencija. U literaturi je ovaj problem tretiran na različite načine, u zavisnosti od ciljeva koje su pojedini autori želeli da postignu. Uglavnom su u ovom kontekstu posmatrane specijalne klase binarnih relacija (relacije poretka ili skupovno-teoretska inkluzija). Tako na primer, G. Czédli i G. Pollák u svojim radovima definišu relaciju na partitivnom skupu na sledeći način: ako je $\langle P, \leq \rangle$ konačan parcijalno uredjen skup i $A, B \subseteq P$, onda $A \leq B$ znači da postoji injektivno preslikavanje $\varphi : A \to B$ tako da za sve $x \in X$ važi $x \leq \varphi(x)$. Na taj način postiže se da je $\langle \mathcal{P}(P), \leq \rangle$ ponovo parcijalno uredjen skup, a pod izvesnim uslovima i mreža (potreban i dovoljan uslov dat je u radu [16]).

Opštu definiciju n-arne stepene relacije daje S. Whitney u svojoj doktorskoj tezi iz 1977. godine.

Definicija 1.28 *(a) Ako je $R \subseteq A^n$, definišemo $R_k^{\uparrow} : A^{n-1} \to A$ sa*

$$R_k^{\uparrow}(X_1, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_n) = \{x_k \mid (\exists x_1 \in X_1) \ldots (\exists x_{k-1} \in X_{k-1})$$

$$(\exists x_{k+1} \in X_{k+1}) \ldots (\exists x_n \in X_n)\ (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in R\},$$

za sve $X_1, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_n \subseteq A$.

(b) Ako je $R \subseteq A^n$, definišemo $R^+ \subseteq \mathcal{P}(A)^n$ na sledeći način: $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in R^+$ako

$$X_1 \subseteq R_1^{\uparrow}(X_2, X_3, \ldots, X_n)$$

$$X_2 \subseteq R_2^{\uparrow}(X_1, X_3, \ldots, X_n)$$

$$\vdots$$

$$X_n \subseteq R_n^{\uparrow}(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$$

za sve $X_1, \ldots, X_n \subseteq A$.

(c) Neka je $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{R} \rangle$ relacijska struktura. Odgovarajuća **(relacijska) struktura kompleksa** *jeste $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \langle \mathcal{P}(A), \{R^+ \mid R \in \mathcal{R}\} \rangle$.*

Dakle, ako je specijalno $n = 2$, tj. R je binarna relacija na A, onda je $R^+ \subseteq \mathcal{P}(A)^2$ definisano sa: XR^+Y ako

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\, xRy$$

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\, xRy,$$

za sve $X, Y \subseteq A$.

Primetimo da je ovako definisano stepenovanje binarnih relacija pravo uopštenje stepenovanja operacija, jer važi

Lema 1.9 *Neka je $R \subseteq A^2$ u stvari operacija, odnosno, postoji $f : A \to A$ tako da za sve $x, y \in A$ važi xRy ako i samo ako je $f(x) = y$. Tada je R^+ baš operacija f^+, tj. XR^+Y ako i samo ako je $f^+(X) = Y$, za sve $X, Y \subseteq A$.*

Dokaz. Neka $X, Y \subseteq A$. Tada je

$$XR^+Y \iff (\forall x \in X)(\exists y \in Y)\, f(x) = y \,\&\, (\forall y \in Y)(\exists x \in X)\, f(x) = y \iff$$

$$f^+(X) \subseteq Y \,\&\, Y \subseteq f^+(X) \iff f^+(X) = Y.$$

□

Osnovne osobine stepenovanja u odnosu na skupovno-teoretske i relacijske operacije sadržane su u sledećoj teoremi

Teorema 1.41 *Neka je $R, S \subseteq A^2$. Tada važi*

(a) $R \subseteq S \Rightarrow R^+ \subseteq S^+$;
(b) $(R \cap S)^+ \subseteq R^+ \cap S^+$;
(c) $R^+ \cup S^+ \subseteq (R \cup S)^+$;
(d) $(R \circ S)^+ = R^+ \circ S^+$;
(e) $(R^+)^{-1} = (R^{-1})^+$.

Dokaz.

(a) Sledi iz Definicije 1.28.

(b) Sledi iz *(a)*, jer je $(R\cap S)^+ \subseteq R^+$ i $(R\cap S)^+ \subseteq S^+$.

(c) Sledi iz *(a)*, jer je $R^+ \subseteq (R\cup S)^+$ i $S^+ \subseteq (R\cup S)^+$.

(d) Dokažimo da je $(R\circ S)^+ \subseteq R^+\circ S^+$. Neka $(X,Y)\in (R\circ S)^+$ i neka je

$$Z = \{z\in A \mid (\exists x\in X)(\exists y\in Y)\; xRz \;\&\; zRy\}.$$

Ako $x\in X$, tada postoji $y\in Y$ tako da je $(x,y)\in R\circ S$, odnosno, postoji $z\in A$ tako da je xRz i zRy. Jasno, $z\in Z$. Obrnuto, ako $z\in Z$, onda postoji $x\in X$ tako da je xRz. Dakle, važi XR^+Z. Analogno se dokaže da je ZS^+Y, pa $(X,Y)\in R^+\circ S^+$.

Dokažimo da je $R^+\circ S^+ \subseteq (R\circ S)^+$. Neka $(X,Y)\in R^+\circ S^+$. Tada postoji $Z\subseteq A$ tako da je XR^+Z i ZR^+Y. Ako $x\in X$, onda za neko $z\in Z$ važi xRz, ali isto tako postoji $y\in Y$ tako da je zSy. Dakle, važi $(x,y)\in(R\circ S)$. Slično se pokaže da za sve $y\in Y$ postoji $x\in X$ za koje važi $(x,y)\in R\circ S$, pa $(X,Y)\in(R\circ S)^+$.

(e)

$$(X,Y)\in (R^+)^{-1} \iff (Y,X)\in R^+ \iff$$

$$(\forall y\in Y)(\exists x\in X)\; yRx \;\&\; (\forall x\in X)(\exists y\in Y)\; yRx \iff$$

$$(\forall y\in Y)(\exists x\in X)\; xR^{-1}y \;\&\; (\forall x\in X)(\exists y\in Y)\; xR^{-1}y \iff$$

$$(X,Y)\in (R^{-1})^+.$$

□

Neke osobine relacija su invarijantne u odnosu na stepenu konstrukciju koju razmatramo, a neke nisu. Tu činjenicu ilustruje sledeće tvrdjenje.

Teorema 1.42 *Neka je R binarna relacija na skupu A.*

(a) Ako je R relacija ekvivalencije onda je i R^+ relacija ekvivalencije.

(b) ako je R relacija poretka onda R^+ ne mora biti relacija poretka.

Dokaz.

(a) Dokazaćemo da su refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost relacija invarijante pomenute konstrukcije. Neka je $X, Y, Z \subseteq A$.
Ako je R refleksivna, tada za sve $x \in X$ postoji $y \in X$ $(y = x)$ tako da je xRy, pa je XR^+X.
Ako je R simetrična, XR^+Y i $x \in X$, tada važi

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\, xRy \;\&\; (\forall y \in Y)(\exists x \in X)\, xRy.$$

Pa zbog simetričnosti imamo

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\, yRx \;\&\; (\forall y \in Y)(\exists x \in X)\, yRx,$$

odakle sledi YR^+X.
Ako je R tranzitivna, $x \in X$ i važi XR^+Y i YR^+Z, tada postoji $y \in Y$ tako da je xRy. Dalje, postoji $z \in Z$ tako da je yRz, pa iz tranzitivnosti relacije R sledi xRz. Na sličan način se pokaže da za sve $z \in Z$ postoji $x \in X$ tako da je xRz, pa je XR^+Z.

(b) Neka je $A = \{1,2,3\}$ i $\leq$ je uobičajeni poredak na A. Tada je $\{1,2,3\} \leq^+ \{1,3\}$ i $\{1,3\} \leq^+ \{1,2,3\}$.

□

Iz Definicije 1.28 vidljivo je da relaciju R^+ možemo prikazati kao presek dve "slabe" stepene relacije, koje se definišu na sledeći način

Definicija 1.29 *Neka je $X, Y \subseteq A^2$. Tada je*

$$XR^{\rightarrow}Y \iff (\forall x \in X)(\exists y \in Y)\, xRy;$$

$$XR^{\leftarrow}Y \iff (\forall y \in Y)(\exists x \in X)\, xRy.$$

Ove tri stepene relacije korišćene su u teorijskom računarstvu u kontekstu **stepenih domena** (pri čemu je R relacija poretka). Naime, u pokušaju davanja izvesne interpretacije (značenja) determinističkim programima, veoma pogodnim pokazali su se ω-kompletni parcijalno uredjeni skupovi zvani domeni.

Da bismo definisali domen posmatrajmo parcijalno uredjeni skup $\mathcal{D} = \langle D, \sqsubseteq \rangle$. Neprazan podskup X skupa D je **usmeren** (directed) ako svaka dva elementa iz

X imaju gornje ograničenje u X. $\mathcal{D}$ je **kompletno parcijalno uredjenje** ako ima najmanji element $\perp$ i svaki usmeren podskup X ima najmanje gornje ograničenje $\sqcup X$ u D. Element $c \in D$ je **kompaktan** ako za svaki usmeren podskup X iz $c \sqsubseteq \sqcup X$ sledi $c \sqsubseteq x$ za neko $x \in X$. Obeležimo sa D^0 skup kompaktnih elemenata skupa D. Za kompletno parcijalno uredjenje $\mathcal{D}$ kažemo da je **algebarsko** ako je za sve $x \in D$ skup $C_x = \{c \in D^0 \mid c \sqsubseteq x\}$ usmeren i $\sqcup C_x = x$. Ako je D^0 prebrojiv skup, tada kažemo da je $\mathcal{D}$ **ω-algebarsko kompletno parcijalno uredjenje**.

Definicija 1.30 **Domen** *je ω-algebarsko kompletno parcijalno uredjenje.*

Kada govorimo o determinističkom programu, skup stanja posmatramo kao neki domen $\mathcal{D}$, a sam program možemo interpretirati kao preslikavanje iz D u D. Tada je prirodno da nedeterministički program interpretiramo kao preslikavanje iz D u $\mathcal{P}(D)$. To znači da je potrebno "preneti" strukturu domena sa D na $\mathcal{P}(D)$. Konstrukcija koju pri tome koristimo naziva se idealsko kompletiranje (completion by ideals). Ako je $\mathcal{Q} = \langle Q, \leq \rangle$ kvazi uredjenje sa najmanjim elementom $\perp$, tada je $I \subseteq Q$ *ideal* u $\mathcal{Q}$ ako je I usmeren i iz $x \in I$ i $y \leq x$ sledi $y \in I$. Ako je D skup svih ideala kvazi uredjenja $\mathcal{Q}$, tada je $\langle D, \subseteq \rangle$ domen i zovemo ga **idealskim kompletiranjem kvazi uredjenja $\mathcal{Q}$**.

Ovo nam omogućava da definišemo stepene domene, koji igraju veoma važnu ulogu u modelovanju nedeterminističkih programa.

Definicija 1.31 *Neka je $\mathcal{D} = \langle D, \sqsubseteq \rangle$ domen i $M[D]$ skup svih konačnih nepraznih podskupova skupa D^0.*

- **Stepeni domen Hoarea** *je idealsko kompletiranje kvazi-uredjenog skupa $\langle M[D], \sqsubseteq^{\rightarrow} \rangle$.*
- **Stepeni domen Smytha** *je idealsko kompletiranje kvazi-uredjenog skupa $\langle M[D], \sqsubseteq^{\leftarrow} \rangle$.*
- **Stepeni domen Plotkina** *je idealsko kompletiranje kvazi-uredjenog skupa $\langle M[D], \sqsubseteq^{+} \rangle$.*

U teorijskom računarstvu poznate su i neke druge konstrukcije koje daju iste stepene domene. Tako G.Winskel ([48]) povezuje stepene domene sa modalnom logikom i pokazuje kako je stepeni domen Hoarea povezan sa modalnim formulama koje opisuju moguće ponašanje procesa, stepeni domen Smytha sa formulama koje opisuju neizbežno ponašanje procesa, a stepeni domen Plotkina sa oba tipa formula.

1.9 Relacijske strukture kompleksa i identiteti

Definicija stepene relacije koju je dao Whitney, omogućuje nam da za svaku operacijsko-relacijsku strukturu $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ formiramo odgovarajuću strukturu kompleksa. Grätzer i Whitney u svom radu [23] daju potreban i dovoljan uslov da varijetet (operacijsko-relacijskih) struktura bude zatvoren u odnosu na ovu konstrukciju.

Definicija 1.32 **Atomarna formula** *na jeziku prvog reda* $\mathcal{L} = \mathcal{F} \cup \mathcal{R}$ *je formula oblika* $R(t_1, \ldots, t_n)$ *gde* $R \in \mathcal{R}$ *ili je* R *znak* $\approx$, *a* $t_1, \ldots, t_n$ *su termi.* **Varijetet struktura** *je klasa definisana nekim skupom atomarnih formula, tj. klasa svih struktura na kojima važe sve formule iz datog skupa.*

Definicija 1.33 *Neka je* $\mathcal{A} = \langle A, \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ *operacijsko-relacijska struktura. Odgovarajuća* **struktura kompleksa** *je*

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \langle \mathcal{P}(A), \{f^+ \mid f \in \mathcal{F}\}, \{R^+ \mid R \in \mathcal{R}\} \rangle,$$

gde su f^+ *i* R^+ *iz Definicija 1.1 i 1.28, redom.*

U nastavku ovog odeljka, pod formulom ćemo uvek podrazumevati atomarnu formulu.

Definicija 1.34 *Kažemo da je varijetet struktura* V $\mathcal{P}$-**zatvoren** *ako* $\mathcal{P}(\mathcal{A}) \in V$ *za sve* $\mathcal{A} \in V$.

Definicija 1.35 *Formula* $R(t_1, \ldots, t_n)$ *je* **linearna** *ako su svi termi koji se pojavljuju u njoj linearni. Formula* $R(t_1, \ldots, t_n)$ *je* **regularna** *ako se isti skup promenljivih pojavljuje u svakom od termova* t_i.

Sledeća lema je ključna u dokazu glavne teoreme.

Lema 1.10 *(Grätzer,Whitney, [23]) Neka je V $\mathcal{P}$-zatvoren varijetet struktura i neka $V \models R(p_1, \ldots, p_l)$. Tada postoje termi $p'_1, \ldots, p'_l$ takvi da*

(a) $V \models R(p'_1, \ldots, p'_l)$;

(b) za sve i, p'_i je linearizacija od p_i;

(c) $R(p_1, \ldots, p_l)$ se dobija od $R(p'_1, \ldots, p'_l)$ identifikovanjem promenljivih.

Dokaz. Neka se sve promenljive koje se pojavljuju u termima $p_1, \ldots, p_l$ nalaze u skupu $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Primetimo najpre da postoji ceo broj $n \geq m$, surjektivno preslikavanje $\phi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ i linearni termi $q_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, q_l(x_1, \ldots, x_n)$, takvi da je $p_i(x_1, \ldots, x_m) = q_i(x_{\phi(1)}, \ldots, x_{\phi(n)})$, za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ovo sledi iz Leme 1.2 koja je u odeljku 1.1 dokazana za $l = 2$, ali lako se može uopštiti. Posmatrajmo sada slobodnu algebru $\mathcal{B}$ na $\{a_1, \ldots, a_n\}$, definisanu identitetima koji važe u V. Za svako $S \in \mathcal{R}$ definišimo relaciju S na $\mathcal{B}$ na sledeći način:

$$S(t_1, \ldots t_k) \text{ važi u } \mathcal{B} \text{ ako i samo ako } V \models S(t_1, \ldots, t_k).$$

Ovako dobijena struktura $\mathcal{B} = \langle B, \mathcal{F}, \mathcal{R} \rangle$ pripada varijetetu V. Pošto je V $\mathcal{P}$-zatvoren, i $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ se nalazi u V. Neka je $A_j = \{a_i \mid \phi(i) = j\}$, za sve $j \in \{1, \ldots, m\}$. Jasno je da u $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ važi

$$R^+(p_1(A_1, \ldots, A_m), \ldots, p_l(A_1, \ldots, A_m)).$$

Pošto $b_1 = q_1(a_1, \ldots, a_n) \in q_1^+(A_{\phi(1)}, \ldots, A_{\phi(n)}) = p_1(A_1, \ldots, A_m)$, na osnovu definicije relacije R^+ sledi da postoje $b_2 \in p_2(A_1, \ldots, A_m), \ldots, b_l \in p_l(A_1, \ldots, A_m)$, takvi da u $\mathcal{B}$ važi $R(b_1, \ldots, b_n)$. Na osnovu Leme 1.1, sledi da postoje preslikavanja α_i skupa $\{1, \ldots, n\}$ takva da je $\phi\alpha_i = \phi$ i $b_i = q_i(a_{\alpha_i(1)}, \ldots, a_{\alpha_i(n)})$ (primetimo da je α_1 identičko preslikavanje). Medjutim, to znači da u V važi $R(p'_1, \ldots, p'_l)$, gde je $p'_i = q_i(x_{\alpha_i(1)}, \ldots, x_{\alpha_i(n)})$. Termi p'_i ne moraju biti linearni (jer elementi $x_{\alpha_i(j)}$ ne moraju biti medjusobno različiti), ali su svakako generalizacije termova p_i, dok je p'_1 linearizacija terma p_1. Primetimo još da se $R(p_1, \ldots, p_l)$ može dobiti od $R(p'_1, \ldots, p'_l)$ tako što ćemo u drugoj formuli umesto x_i zameniti $x_{\phi(i)}$, što sledi iz $\phi\alpha_i = \phi$.

Ponavljajući opisani postupak, možemo linearizovati sve terme koji se pojavljuju u posmatranoj formuli (jer je generalizacija generalizacije terma opet generalizacija, a generalizacija linearnog terma je linearan term), čime je tvrdjenje dokazano.
□

Teorema 1.43 *([23]) Varijetet struktura V je $\mathcal{P}$-zatvoren ako i samo ako je moguće definisati varijetet V regularnim linearnim atomarnim formulama.*

Dokaz. Neka je varijetet V $\mathcal{P}$-zatvoren i neka $V \models R(p_1,\dots,p_l)$. Tada je atomarna formula $R(p_1,\dots,p_l)$ regularna. U suprotnom, ako bi se promenljiva x_i pojavljivala u termu p_k, ali ne u termu p_s, tada bismo, stavljajući $x_i = \emptyset$ i $x_j \neq \emptyset$ za $j \neq i$, dobili kontradikciju sa definicijom stepene relacije (u algebri kompleksa).

Neka je sada $R(p_1,\dots,p_n)$ formula koja važi u V. S obzirom na Lemu 1.10, u V važi $\Phi = R(p'_1,\dots,p'_n)$, gde su p'_i linearni termi i $R(p_1,\dots,p_n)$ može da se izvede iz $R(p'_1,\dots,p'_n)$. Dakle, svaka formula koja važi u V može se izvesti iz neke linearne regularne (atomarne) formule.

Obratno, neka je varijetet V definisan regularnim linearnim atomarnim formulama, $\mathcal{A} \in V$ i $R(p_1,\dots,p_n)$ je regularna linearna atomarna formula koja važi u V. Dokazaćemo da $R(p_1,\dots,p_n)$ važi u $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Neka su $A_1,\dots,A_m$ neprazni podskupovi od A i $b_k \in p_k(A_1,\dots,A_m)$. Tada, na osnovu Posledice 1.1, postoje $a_1,\dots,a_m$ takvi da $a_i \in A_i$ za sve i i $b_k = p_k(a_1,\dots,a_m)$. Medjutim, tada u $\mathcal{A}$ važi $R(b_1,\dots,b_k,\dots,b_n)$, gde je $b_i = p_i(a_1,\dots,a_m) \in p_i(A_1,\dots,A_m)$ za sve i, pa, po definiciji stepene relacije važi i

$$R^+(p_1(A_1,\dots,A_m),\dots p_n(A_1,\dots,A_m)).$$

S druge strane, ako je $A_j = \emptyset$ za neko j, tada je za svako i, zbog regularnosti, $p_i(A_1,\dots,A_j,\dots,A_m) = \emptyset$ i $R^+(\emptyset,\dots,\emptyset,\dots)$ važi po definiciji.
□

Ako u nosač algebre kompleksa ne uključujemo $\emptyset$, tada, analogno Definiciji 1.34, možemo govoriti o $\mathcal{P}_+$-zatvorenim varijetetima. Iz dokaza Teoreme 1.43, jasno je da važi sledeće tvrdjenje.

Teorema 1.44 *Varijetet struktura V je $\mathcal{P}_+$-zatvoren ako i samo ako je moguće definisati varijetet V linearnim atomarnim formulama.*

Napomenimo još da se originalni dokaz odnosi na strukture gde operacije i relacije ne moraju biti konačne arnosti. Odgovarajuće tvrdjenje o $\mathcal{P}$-zatvorenim varijetetima ne razlikuje se od tvrdjenja Teoreme 1.43, dok $\mathcal{P}_+$-zatvorene varijetete ne možemo uvek definisati linearnim atomarnim formulama. To dokazuje sledeći primer iz [23].

Primer 1.7 *Neka je V varijetet struktura sa binarnom operacijom $\cdot$ i ω-arnom relacijom R, definisan formulama:*

$$R(x_1^2, x_3^2, \ldots);$$

$$R(x_1x_2, x_3^2, x_5^2, \ldots);$$

$$R(x_1x_2, x_3x_4, x_5^2, x_7^2, \ldots);$$

$$\ldots$$

Dokazaćemo da je V $\mathcal{P}_+$-zatvoren. Neka je $\mathcal{A}$ struktura iz V, i $A_1, A_2, \ldots$ neprazni podskupovi skupa A. Uzmimo neku od formula koje definišu V. Ona je oblika:

$$R(x_1x_2, \ldots, x_{2k-1}x_{2k}, x_{2k+1}^2, x_{2k+3}^2, \ldots).$$

Dokazaćemo da važi

$$R^+(A_1A_2, \ldots, A_{2k-1}A_{2k}, A_{2k+1}^2, A_{2k+3}^2, \ldots).$$

Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}, b_{2k+1}, a_{2k+3}, b_{2k+3}, \ldots$ elementi skupa A takvi da $a_i \in A_i$, $b_i \in A_i$ (pri čemu a_i ne mora biti različito od b_i).

Ako $b \in A_{2s-1}A_{2s}$, $s \leq k$, onda je $b = a'a''$, gde $a' \in A_{2s-1}$, $a'' \in A_{2s}$. Tada važi

$$R(a_1a_2, \ldots, b, \ldots, a_{2k-1}a_{2k}, a_{2k+1}^2, a_{2k+3}^2, \ldots),$$

pri čemu, naravno, $a_{2i-1}a_{2i} \in A_{2i-1}A_{2i}$, za $i \in \{1, \ldots, k\} \setminus s$, $a_{2i+1}^2 \in A_{2i+1}^2$ za $i \geq k$.

Ako $b \in A_{2j+1}^2$, $j \geq k$, onda je $b = a'b'$, $a'b' \in A_{2j+1}$, pa važi

$$R(a_1a_2, \ldots, \ldots, a_{2k-1}a_{2k}, a_{2k+1}b_{2k+1}, \ldots, a'b', a_{2j+3}^2, a_{2j+5}^2, \ldots).$$

Pri tome je bitno primetiti da $a_{2i-1}a_{2i} \in A_{2i-1}A_{2i}$, *za* $i \in \{1,\dots,k\}$, $a_{2i+1}^2 \in A_{2i+1}^2$ *za* $i \geq j+1$ *i* $a_{2i+1}b_{2i+1} \in A_{2i+1}^2$, *za* $k \leq i \leq j$.

Time smo dokazali da sve formule koje definišu V *važe u* $\mathcal{P}_+(\mathcal{A})$.

Da bismo dokazali da nijedna netrivijalna linearna formula ne važi u V, *posmatrajmo slobodan grupoid* $\mathcal{B}$ *sa relacijom* R *definisanom na sledeći način:*

$$R(g_1, g_2, \dots) \text{ ako i samo ako } (\exists m_0)\ g_m = h_m^2 \text{ za } m \geq m_0.$$

Ovako dobijena struktura nalazi se u V. *Jasno je da u* $\mathcal{B}$ *ne važi identitet* $p \approx q$ *za dva različita terma* p *i* q. *Dalje, ako bi u* V *(a samim tim i u* $\mathcal{B}$*) bila zadovoljena linearna formula* $R(p_1, p_2, \dots)$, *onda bi, za neko* m, *term* p_m *bio kvadrat nekog drugog terma, što je u protivrečnosti sa linearnošću formule.*

Poglavlje 2

Uopštene faktor algebre i algebre kompleksa

2.1 Faktor algebre i algebre kompleksa

Ako je $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ algebra i $\theta \in Con\mathcal{A}$, faktor algebra $\mathcal{A}/\theta$ je algebra istog tipa kao i $\mathcal{A}$ sa nosačem A/θ i skupom fundamentalnih operacija $\{\ulcorner f \urcorner \mid f \in F\}$, pri čemu je za n-arnu operaciju f:

$$\ulcorner f \urcorner (x_1/\theta, \ldots, x_n/\theta) = f(x_1, \ldots, x_n)/\theta.$$

Algebre kompleksa tesno su povezane sa faktor algebrama. Naime, nosač faktor algebre A/θ je podskup od $\mathcal{P}(A)$. No, A/θ nije uvek podalgebra od $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.

Primer 2.1 *Neka je $\mathcal{G} = \langle G, \cdot, ^{-1}, e \rangle$ grupa, $\theta \in Con\,\mathcal{G}$ i $H = e/\theta$. Elementi faktor algebre su koseti xH, $x \in G$. Jasno je da je $aH \cdot bH = abH$ i $(aH)^{-1} = a^{-1}H$. Ipak, $\mathcal{G}/H \leq \mathcal{P}(\mathcal{G})$ ako i samo ako je $\theta = \Delta$, jer u ostalim slučajevima $e^+ = \{e\} \notin \mathcal{G}/H$.*

Primer 2.2 *Posmatrajmo monoid $\mathcal{N} = \langle N, f \rangle$, gde je $f(x,y) = x \cdot y$ za $x, y \in N$. Neka je θ kongruencija datog monoida definisana sa: $x\ \theta\ y$ ako i samo ako $3 \mid x - y$. Tada je $f^+(3N, 3N) = 9N \neq 3N = \ulcorner f \urcorner (3N, 3N)$, pa $\mathcal{N}/\theta$ nije podalgebra od $\mathcal{P}(\mathcal{N})$.*

Definicija 2.1 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ algebra, $R \subseteq A^2$ i f n-arna operacija iz F. Kažemo da R* **čuva argumente operacije** *f ako za sve $z, y_1, \ldots, y_n \in A$ iz $zRf(y_1, \ldots, y_n)$ sledi da postoje $x_1, \ldots, x_n \in A$ takvi da $x_i R y_i$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $z = f(x_1, \ldots, x_n)$. Ako R čuva argumente svih operacija iz F i kompatibilna je sa svim operacijama iz F, tada kažemo da R* **čuva strukturu algebre** *$\mathcal{A}$.*

Teorema 2.1 *(Brink [7]) Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ algebra i $\theta \in Con\mathcal{A}$. Tada $\mathcal{A}/\theta \leq \mathcal{P}(\mathcal{A})$ ako i samo ako θ čuva argumente svih operacija iz F.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}/\theta \leq \mathcal{P}(\mathcal{A})$. Ako je f n-arna operacija iz F, tada se operacija $\ulcorner f \urcorner$ poklapa sa operacijom f^+ na A/θ. Neka su $z, x_1, \ldots, x_n$ elementi skupa A takvi da je $z\theta f(x_1, \ldots, x_n)$. Odatle sledi

$$z \in f(x_1, \ldots, x_n)/\theta = \ulcorner f \urcorner (x_1/\theta, \ldots, x_n/\theta) = f^+(x_1/\theta, \ldots, x_n/\theta).$$

To znači da postoje $z_1 \in x_1/\theta, \ldots, z_n \in x_n/\theta$ takvi da je $z = f(z_1, \ldots, z_n)$, pa θ čuva argumente operacije f.

Obrnuto, neka θ čuva argumente n-arne operacije f i $x_1, \ldots, x_n \in A$. Ako $z \in \ulcorner f \urcorner (x_1/\theta, \ldots, x_n/\theta) = f(x_1, \ldots, x_n)/\theta$, onda je $z\theta f(x_1, \ldots, x_n)$. Medjutim, tada je $z = f(z_1, \ldots, z_n)$ za neke $z_1 \in x_1/\theta, \ldots, z_n \in x_n/\theta$, pa $z \in f^+(x_1/\theta, \ldots, x_n/\theta)$. Ako $z \in f^+(x_1/\theta, \ldots, x_n/\theta)$, tada postoje $z_1, \ldots, z_n \in A$ takvi da je $z_1\theta x_1, \ldots, z_n\theta x_n$ i $z = f(z_1, \ldots, z_n)$. Odatle, s obzirom da $\theta \in Con\mathcal{A}$, dobijamo $z\theta f(x_1, \ldots, x_n)$, odakle sledi $z \in f(x_1, \ldots, x_n)/\theta = \ulcorner f \urcorner (x_1/\theta, \ldots, x_n/\theta)$.
□

Lema 2.1 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ algebra i $\theta \in Con\mathcal{A}$. Onda $\theta^+ \in Con\mathcal{P}(\mathcal{A})$.*

Dokaz. U glavi 1. pokazano je da je θ^+ relacija ekvivalencije, dakle, potrebno je još pokazati da je θ^+ kompatibilna na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Neka je f n-arna operacija iz F, $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n \in \mathcal{P}(A)$ i $X_1\theta^+Y_1, \ldots, X_n\theta^+Y_n$. Ako $x \in f^+(X_1, \ldots, X_n)$, tada je $x = f(x_1, \ldots, x_n)$ za neke $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$. Dalje, postoje $y_1 \in Y_1, \ldots, y_n \in Y_n$ takvi da je $x_1\theta y_1, \ldots, x_n\theta y_n$. Odatle sledi $f(x_1, \ldots, x_n)\theta f(y_1, \ldots, y_n)$, a to znači da postoji $y = f(y_1, \ldots, y_n) \in f^+(Y_1, \ldots, Y_n)$ tako da je $x\theta y$. Analogno se pokazuje da je i drugi uslov ispunjen i prema tome $f^+(X_1, \ldots, X_n)\theta^+ f^+(Y_1, \ldots, Y_n)$.
□

Teorema 2.2 *(Brink [7]) Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ algebra i $\theta \in Con\mathcal{A}$. Tada važi*

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}/\theta) \cong \mathcal{P}(\mathcal{A})/\theta^+ \tag{2.1}$$

Dokaz. Definišimo preslikavanje $\varphi : \mathcal{P}(A)/\theta^+ \to \mathcal{P}(A/\theta)$ sa

$$\varphi(X/\theta^+) = \{x/\theta \mid x \in X\}.$$

Neka je $X/\theta^+ = Y/\theta^+$ i $x \in X$. Iz $X\theta^+X$ sledi $X\theta^+Y$, pa postoji $y \in Y$ tako da je $x\theta y$, odnosno $x/\theta = y/\theta$. Slično se pokazuje da za sve $y \in Y$ postoji $x \in X$ tako da je $x/\theta = y/\theta$, a to znači da je $\varphi(X/\theta^+) = \varphi(Y/\theta^+)$, tj. preslikavanje φ je dobro definisano.

Neka je $\varphi(X/\theta^+) = \varphi(Y/\theta^+)$ i $Z \in X/\theta^+$. Tada za sve $z \in Z$ postoji $x \in X$ tako da $z \in x/\theta$. Dalje, postoji $y \in Y$ tako da je $x/\theta = y/\theta$, a odatle je $z\theta y$. Osim toga, lako se pokaže da za sve $y \in Y$ postoji $z \in Z$ tako da je $z\theta y$, odakle dobijamo $Z \in Y/\theta^+$, odnosno $X/\theta^+ \subseteq Y/\theta^+$. Zbog dualnosti sledi $X/\theta^+ = Y/\theta^+$, pa je φ injektivno preslikavanje.

Neka je $\alpha \subseteq A/\theta$. Ako je $X = \cup\alpha$, tada je $\varphi(X/\theta^+) = \alpha$ pa je φ surjektivno preslikavanje.

Ostalo je još da se pokaže da je φ homomorfizam. Neka je f n-arna operacija iz F i $X_1, \dots, X_n \subseteq A$. Tada je

$$\varphi(\lceil f^{+}\rceil(X_1/\theta^+, \dots, X_n/\theta^+)) = \varphi(f^+(X_1, \dots, X_n)/\theta^+) =$$

$$\{x/\theta \mid x \in f^+(X_1, \dots, X_n)\} = \{f(x_1, \dots, x_n)/\theta \mid x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\} =$$

$$\{\lceil f\rceil(x_1/\theta, \dots, x_n/\theta) \mid x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n\} =$$

$$\{\lceil f\rceil(x_1/\theta, \dots, x_n/\theta) \mid x_1/\theta \in \varphi(X_1/\theta^+), \dots, x_n/\theta \in \varphi(X_n/\theta^+)\} =$$

$$\lceil f\rceil^+(\varphi(X_1/\theta^+), \dots, \varphi(X_n/\theta^+)).$$

□

Lema 2.2 *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre i $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizam. Tada je $(ker\varphi)^+ = ker\varphi^+$.*

Dokaz.

$$(X,Y) \in (ker\varphi)^+ \iff$$

$$(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ \varphi(x) = \varphi(y)\ \&\ (\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ \varphi(x) = \varphi(y) \iff$$

$$\{\varphi(x) \mid x \in X\} = \{\varphi(y) \mid y \in Y\} \iff$$

$$\varphi^+(X) = \varphi^+(Y) \iff (X,Y) \in ker\varphi^+.$$

□

Teorema 2.3 *(Brink [7]) Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre i $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ epimorfizam. Tada važi*

$$\mathcal{P}(\mathcal{A})/(ker\varphi)^+ \cong \mathcal{P}(\mathcal{B}) \tag{2.2}$$

Dokaz. Kako je φ^+ takodje epimorfizam, tvrdjenje je posledica Leme 2.2.
□

Teorema 2.4 *(Brink [7]) Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ algebre, $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$, $\theta \in Con\mathcal{A}$, $\theta_1 = \theta_{|B}$, $\theta_2 = \theta_{|[B]^\theta}$. Tada je*

$$\mathcal{P}(\mathcal{B})/\theta_1^+ \cong [\mathcal{P}(\mathcal{B})]^{\theta^+}/\theta_2^+. \tag{2.3}$$

Dokaz. Na osnovu prve teoreme o izomorfizmu je $\mathcal{B}/\theta_1 \cong [\mathcal{B}]^\theta/\theta_2$, pa je $\mathcal{P}(\mathcal{B}/\theta_1)$ $\cong \mathcal{P}([\mathcal{B}]^\theta/\theta_2)$. Na osnovu teoreme 2.2 sledi $\mathcal{P}(\mathcal{B})/\theta_1^+ \cong \mathcal{P}([\mathcal{B}]^\theta)/\theta_2^+$ i sada ostaje još da se pokaže da je $\mathcal{P}([\mathcal{B}]^\theta) = [\mathcal{P}(\mathcal{B})]^{\theta^+}$, što sledi direktno iz definicije stepene relacije θ^+.
□

Teorema 2.5 *(Brink [7]) Neka su ψ i θ kongruencije algebre $\mathcal{A}$ i $\psi \subseteq \theta$. Tada*

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}/\psi)\Big/(\theta/\psi)^+ \cong \mathcal{P}(\mathcal{A})/\theta^+. \tag{2.4}$$

Dokaz. Na osnovu druge teoreme o izomorfizmu je $\mathcal{A}/\psi\Big/\theta/\psi \cong \mathcal{A}/\theta$. Tada su i algebre kompleksa leve i desne strane izomorfne, pa tvrdjenje sledi iz Teoreme 2.2.
□

2.2 Uopštena faktor algebra i dobre faktor relacije

U prethodnom odeljku date su "stepene" verzije poznatih teorema o homomorfizmu i izomorfizmu. Da bismo te teoreme uopštili, potrebno je formulisati pojam "dobre faktor relacije" tj. one relacije koja je opštija od kongruencije, ali još uvek dovoljno dobra da se napravi faktor algebra.

Definicija 2.2 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ algebra i $R \subseteq A^2$.*

(a) Za sve $a \in A$ definišemo **klasu elementa** *a sa $a/R = \{b \mid bRa\}$. Odgovarajući* **uopšteni faktor skup** *je $A/R = \{a/R \mid a \in A\}$.*

(b) Relacija $\varepsilon(R) \subseteq A^2$ je definisana sa:

$$(a,b) \in \varepsilon(R) \iff a/R = b/R.$$

(c) Kažemo da je R **dobra faktor relacija** *na $\mathcal{A}$ ako je $\varepsilon(R)$ kongruencija na $\mathcal{A}$. Skup svih dobrih relacija na $\mathcal{A}$ obeležavamo sa $G(\mathcal{A})$.*

(d) Ako je R dobra faktor relacija na $\mathcal{A}$, odgovarajuća **uopštena faktor algebra** *$\mathcal{A}/R$ je*

$$\mathcal{A}/R = \langle A/R, \{\lceil f \rceil \mid f \in F\} \rangle,$$

gde su operacije $\lceil f \rceil$ ($f \in F$) definisane na sledeći način: ako $ar(f) = n$, tada za sve $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\lceil f \rceil (a_1/R, \ldots, a_n/R) = f(a_1, \ldots, a_n)/R.$$

Primetimo da su dobre faktor relacije tačno one za koje je gornja definicija uopštene faktor algebre dobra (odnosno operacije $\lceil f \rceil$ su dobro definisane za sve $f \in F$.)

Primer 2.3 *Svaka relacija poretka $\leq$ je dobra relacija na bilo kojoj algebri, jer je $\varepsilon(\leq) = \Delta$.*

Primer 2.4 *Relacija ekvivalencije R je dobra relacija na algebri $\mathcal{A}$ ako i samo ako $R \in Con\mathcal{A}$, jer je $\varepsilon(R) = R$.*

Primer 2.5 *Svako kompatibilno kvazi-uredjenje je dobra relacija. Naime, neka je $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ algebra, f n-arna operacija iz F i R kompatibilno kvazi-uredjenje na $\mathcal{A}$ (kvazi-uredjenje je refleksivna i tranzitivna relacija). Ako je $x_i \varepsilon(R) y_i$ za $i \leq n$, onda, s obzirom na refleksivnost relacije R dobijamo $x_1 R y_1, \ldots, x_n R y_n$. Odatle sledi $f(x_1, \ldots x_n) R f(y_1, \ldots, y_n)$. Pretpostavimo sada da $z \in f(x_1, \ldots, x_n)/R$. Iz tranzitivnosti relacije R dobijamo $z \in f(y_1, \ldots, y_n)/R$, dakle $f(x_1, \ldots, x_n)/R \subseteq f(y_1, \ldots, y_n)/R$. Obrnuta inkluzija se analogno dokazuje, pa stoga zaključujemo da je $f(x_1, \ldots, x_n) \varepsilon(R) f(y_1, \ldots, y_n)$ i $\varepsilon(R)$ je kongruencija.*

Primer 2.6 *Svaka relacija koja čuva strukturu algebre je dobra relacija. Naime, neka je R relacija koja čuva strukturu algebre $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ i f n-arna operacija iz F. Ako je $x_1 \varepsilon(R) y_1, \ldots, x_n \varepsilon(R) y_n$ i $z \in f(x_1, \ldots, x_n)/R$, onda, pošto R čuva argumente operacije F, postoje $z_1, \ldots, z_n \in A$ takvi da je $z_1 R x_1, \ldots, z_n R x_n$ i $z = f(z_1, \ldots, z_n)$. Dalje, iz $z_1 \in x_1/R = y_1/R, \ldots, z_n \in x_n/R = y_n/R$ zaključujemo da važi $z_1 R y_1, \ldots, z_n R y_n$. Sada, koristeći kompatibilnost relacije R dobijamo $z = f(z_1, \ldots, z_n) R f(y_1, \ldots, y_n)$. Prema tome,$z \in f(y_1, \ldots, y_n)/R$ i $f(x_1, \ldots, x_n)/R \subseteq f(y_1, \ldots, y_n)/R$. Obrnuta inkluzija se dokazuje na sličan način pa stoga sledi $f(x_1, \ldots, x_n) \varepsilon(R) f(y_1, \ldots, y_n)$ i $\varepsilon(R)$ je kongruencija.*

Primer 2.7 *Neka je $|A| \geq 3$, a, b, c različiti elementi skupa A i $R = \{(c, c)\}$ relacija na A. Definišimo preslikavanje $f : A^n \to A$ na sledeći način:*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} a & \text{ako } x_i = a \text{ za sve } i \\ c & \text{inače} \end{cases}$$

Tada je $a/R = b/R = \emptyset$ ali $f(a, \ldots, a)/R = a/R \neq c/R = f(b, \ldots, b)/R$. Dakle, R je simetrična i tranzitivna relacija koja je kompatibilna na algebri $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$, ali nije dobra na $\mathcal{A}$.

Primer 2.8 *Neka je $|A| \geq 4$, a, b, c, d različiti elementi skupa A i*
$R = \Delta \cup \{(a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a), (c, d), (d, c), (c, b), (b, c)\}$.
Definišimo preslikavanje $f : A^n \to A$ na sledeći način:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} c & \text{ako } x_i = a \text{ za sve } i \\ d & \text{inače} \end{cases}$$

Tada je $a/R = c/R$ *ali* $f(a,\dots,a)/R = c/R \neq d/R = f(c,\dots,c)/R$. *Dakle, R je refleksivna i simetrična relacija koja je kompatibilna na* $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ *ali nije dobra na* $\mathcal{A}$.

Za dobre relacije možemo dokazati sledeću "proširenu teoremu o homomorfizmu":

Teorema 2.6 *Neka su* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ *dve algebre istog tipa. Tada je* $\mathcal{B}$ *homomorfna slika od* $\mathcal{A}$ *ako i samo ako postoji dobra relacija R na* $\mathcal{A}$ *takva da*

$$\mathcal{B} \cong \mathcal{A}/R.$$

Dokaz. Ako je $\mathcal{B}$ homomorfna slika od $\mathcal{A}$ i $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ je epimorfizam, onda je $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}/ker\varphi$, a $ker\varphi$ je, naravno, dobra relacija.

Obrnuto, ako je $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}/R$ i R je dobra relacija na $\mathcal{A}$, posmatrajmo prirodno preslikavanje $\mu : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/R$, $\mu(a) = a/R$. Tada, za svaku n-arnu operaciju F algebre $\mathcal{A}$ važi

$$\mu(f(x_1,\dots,x_n)) = f(x_1,\dots,x_n)/R = \ulcorner f \urcorner (x_1/R,\dots,x_n/R) =$$
$$\ulcorner f \urcorner (\mu(x_1),\dots,\mu(x_n)).$$

Dakle, $\mathcal{A}/R$, a samim tim i $\mathcal{B}$ je homomorfna slika od $\mathcal{A}$.
□

Posledica 2.1 *Neka je R dobra relacija na algebri* $\mathcal{A}$. *Tada je* $\mathcal{A}/R \cong \mathcal{A}/\varepsilon(R)$.

Dokaz. Jezgro epimorfizma μ iz dokaza prethodne teoreme je $\varepsilon(R)$, pa je tvrdjenje direktna posledica klasične teoreme o homomorfizmu.
□

Posledica 2.2 *Neka* $R \in G(\mathcal{A})$. *Tada*

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}/R) \cong \mathcal{P}(\mathcal{A})/(\varepsilon(R))^{+}.$$

Dokaz. Direktna posledica Teoreme 2.2 i Posledice 2.1.
□

Ako je $R \subseteq A^2$ tada su $\varepsilon(R^+)$ i $(\varepsilon(R))^+$ relacije ekvivalencije. Ove dve relacije ne moraju biti jednake, što ilustruje sledeći primer.

Primer 2.9 *Neka je $(L, \leq)$ proizvoljni linearno uredjen skup sa bar tri elementa, $a, b, c \in L$, $a < b < c$, $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, c\}$. Tada $Z \in X/\leq^+$ ako i samo ako za sve $z \in Z$ važi $z \leq c$ i postoji $z \in Z$ tako da $z \leq a$, a to će važiti ako i samo ako $Z \in Y/\leq^+$. Dakle, $(X, Y) \in \varepsilon(\leq^+)$. S druge strane, $(X, Y) \notin (\varepsilon(\leq))^+ = \Delta_{\mathcal{P}(L)}$.*

Ipak, inkluzija u jednom smeru uvek važi

Lema 2.3 *Ako je $R \subseteq A^2$ onda je $(\varepsilon(R))^+ \subseteq \varepsilon(R^+)$.*

Dokaz. Neka $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ i $(X, Y) \in (\varepsilon(R))^+$. Tada za sve $x \in X$ postoji $y \in Y$ tako da je $x/R = y/R$ i za sve $y \in Y$ postoji $x \in X$ tako da je $x/R = y/R$. Treba dokazati da je $X/R^+ = Y/R^+$. Neka $Z \in X/R^+$. Ako $z \in Z$, tada postoji $x \in X$ tako da $z \in x/R$. Po pretpostavci postoji $y \in Y$ tako da $x/R = y/R$. Dakle, za sve $z \in Z$ postoji $y \in Y$ tako da je zRy. Dalje, ako $y \in Y$, tada postoji $x \in X$ tako da je $x/R = y/R$. Za tako izabrano x postoji $z \in Z$ tako da je zRx, odnosno, $z \in x/R = y/R$. Dakle, postoji $z \in Z$ tako da je zRy. Time smo pokazali da važi ZR^+Y, pa je $X/R^+ \subseteq Y/R^+$. Obrnuta inkluzija dokazuje se na sličan način.
□

S obzirom na prethodnu lemu, ako je R dobra relacija na $\mathcal{A}$, faktor relacija $\varepsilon(R^+)/(\varepsilon(R))^+$ je relacija ekvivalencije na $\mathcal{P}(\mathcal{A})/(\varepsilon(R))^+$. Sada je lako dokazati sledeća tvrdjenja:

Posledica 2.3 *Neka $R \in G(\mathcal{A})$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $\varepsilon(R^+)/(\varepsilon(R))^+$ *je kongruencija na* $\mathcal{P}(\mathcal{A})/(\varepsilon(R))^+$*;*
(b) $\varepsilon(R^+)$ *je kongruencija na* $\mathcal{P}(\mathcal{A})$*;*
(c) $R^+ \in G(\mathcal{P}(\mathcal{A}))$.

Teorema 2.7 *Neka $R \in G(\mathcal{A})$ i $R^+ \in G(\mathcal{P}(\mathcal{A}))$. Tada je*

$$\mathcal{P}(\mathcal{A})/(\varepsilon(R))^+ \Big/ \varepsilon(R^+)/(\varepsilon(R))^+ \cong \mathcal{P}(\mathcal{A})/\varepsilon(R^+).$$

2.3 Uredjen skup dobrih relacija

U ovom odeljku ćemo izučavati skup dobrih relacija algebre. Specijalno, daćemo potreban i dovoljan uslov da $\mathcal{G} = \langle G(\mathcal{A}), \subseteq \rangle$ bude mreža.

Definicija 2.3 *Neka je $R \subseteq A^2$ i $\varphi : A/R \to \mathcal{P}(A)$. Onda relaciju $R_\varphi \subseteq A^2$ definišemo na sledeći način:*

$$aR_\varphi b \iff a \in \varphi(b/R).$$

Teorema 2.8 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra i $R \subseteq A^2$. Tada je R dobra relacija na $\mathcal{A}$ ako i samo ako postoji kongruencija θ algebre $\mathcal{A}$ i injekcija $\varphi : A/\theta \to \mathcal{P}(A)$ tako da $R = \theta_\varphi$.*

Dokaz. $(\Leftarrow)$
Neka $\theta \in Con\mathcal{A}$ and $\varphi : A/\theta \to \mathcal{P}(A)$ je injekcija. Tada $(a,b) \in \varepsilon(\theta_\varphi)$ ako i samo ako $a/\theta_\varphi = b/\theta_\varphi$, odnosno, ako i samo ako $\varphi(a/\theta) = \varphi(b/\theta)$. Iz poslednje jednakosti sledi $a/\theta = b/\theta$, tj. $a\theta b$, pa je $\varepsilon(\theta_\varphi) = \theta$. Dakle, $\varepsilon(\theta_\varphi)$ je kongruencija na $\mathcal{A}$ i $\theta_\varphi \in G(\mathcal{A})$.
$(\Rightarrow)$
Neka $R \in G(\mathcal{A})$. Ako stavimo $\theta = \varepsilon(R)$ tada $\theta \in Con\mathcal{A}$. Definišimo preslikavanje $\varphi : A/\theta : \mathcal{P}(A)$ sa $\varphi(a/\theta) = a/R$, $a \in A$. Tada je lako dokazati da je φ injekcija i $R = \theta_\varphi$.
□

Ako je $\mathcal{A}$ dvoelementna algebra, lako je pokazati da tada važi $G(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(A^2)$ i $EqvA = Con\mathcal{A}$. U slučaju $|A| \geq 3$, najpre ćemo dokazati pomoćno tvrdjenje.

Lema 2.4 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ algebra takva da je $G(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(A^2)$ i f je n-arna operacija iz F.*

(a) Ako $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, a \in A$ tako da $f(x_1, \ldots, x_n) = a$ i za sve $i \leq n$ važi: $x_i = a$ ako i samo ako $y_i = a$, tada je $f(y_1, \ldots, y_n) = a$.

(b) Ako je $B \subseteq A$ tako da su $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, f(x_1, \ldots, x_n)$ elementi skupa B, tada $f(y_1, \ldots, y_n) \in B$.

Dokaz.

(a) Neka je $f(y_1,\ldots,y_n) = b \neq a$. Tada postoji relacija R takva da je za sve $i \in \{1,\ldots,n\}$ $x_i/R = y_i/R$ i $a/R \neq b/R$. Medjutim, to je kontradikcija sa uslovima tvrdjenja jer R nije dobra relacija na $\mathcal{A}$.

(b) Ako $f(y_1,\ldots,y_n)$ nije u B, tada, s obzirom na *(a)*, sledi $f(x_1,\ldots,x_n) = f(y_1,\ldots,y_n) \notin B$, što je kontradikcija s početnim uslovima.

□

Teorema 2.9 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ algebra i $|A| \geq 3$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $G(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(A^2)$.

(b) $EqvA = Con\mathcal{A}$.

(c) *Sve fundamentalne operacije algebre $\mathcal{A}$ su projekcije ili esencijalno nularne.*

Dokaz. Lako je videti da su uslovi *(a)* i *(b)* ekvivalentni. Dokažimo sada da su uslovi *(a)* i *(c)* ekvivalentni. Neka je f n-arna funkcija iz F takva da $f(x_1,\ldots,x_n) = x_j$ za sve $x_1,\ldots,x_n \in A$ i $R \subseteq A^2$. Tada iz $x_i/R = y_i/R$ za sve $i \leq n$ sledi $x_j/R = y_j/R$, a odatle je $f(x_1,\ldots,x_n)/R = f(y_1,\ldots,y_n)/R$. Ako je, pak, $f(x_1,\ldots x_n) = a$ za neko fiksirano $a \in A$, tada je $f(x_1,\ldots,x_n)/R = a/R = f(y_1,\ldots,y_n)/R$. Prema tome, ako je ispunjen uslov *(c)*, tada su sve relacije na $\mathcal{A}$ dobre.

Pretpostavimo sada da je $G(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(A^2)$. Neka je f n-arna operacija iz F, $a,b \in A$, $a \neq b$ i $f(a,\ldots,a) = b$. Ako je $c \neq a$ i $c \neq b$, tada je, na osnovu Leme 2.4, $f(c,\ldots,c) = b$. Takodje na osnovu Leme 2.4, mora biti $f(b,\ldots,b) = b$, jer ako je $f(b,\ldots,b) = d \neq b$ i $e \neq d$, tada je $f(e,\ldots,e) = d$, a mi smo već dobili da je $f(e,\ldots,e) = b$.

Dakle, postoje dve mogućnosti:

1) $f(x,\ldots,x) = x$, za sve $x \in A$;

2) $f(x,\ldots,x) = b$, gde je b fiksiran element iz A.

Razmotrimo ova dva slučaja.

1) Neka $a,b \in A$. Tada, s obzirom na Lemu 2.4 *(b)*, $f(a,\dots,a,b,\dots,b) \in \{a,b\}$, pa postoji $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ tako da

$$f(\underbrace{a,\dots,a}_{k},b,\dots,b) = b \text{ i } f(\underbrace{a,\dots,a}_{k+1},b,\dots,b) = a.$$

Ako je $c \neq a$ i $c \neq b$, tada važi

$$f(\underbrace{a,\dots,a}_{k+1},b,\dots,b) \neq b \Rightarrow f(\underbrace{c,\dots,c}_{k},a,b,\dots,b) \neq b.$$

Takodje, s obzirom na Lemu 2.4, imamo

$$f(\underbrace{a,\dots,a}_{k},b,\dots,b) = b \Rightarrow f(\underbrace{c,\dots,c}_{k},b,\dots,b) = b \neq c \Rightarrow$$

$$f(\underbrace{c,\dots,c}_{k},a,b,\dots,b) \neq c.$$

Medjutim, na osnovu Leme 2.4 (b), $f(\underbrace{c,\dots,c}_{k},a,b,\dots,b) \in \{a,b,c\}$, što znači da mora biti $f(\underbrace{c,\dots,c}_{k},a,b,\dots,b) = a$, a odatle sledi

$$f(x_1,\dots,x_k,a,x_{k+2},\dots,x_n) = a, \text{ za sve } x_1,\dots,x_k,x_{k+2},\dots,x_n \in A \setminus \{a\}.$$

Pretpostavimo sada da je $f(y_1,\dots,y_k,a,y_{k+2},\dots,y_n) = d \neq a$. Tada, za svaku $n-1$-torku $(z_1,\dots,z_k,z_{k+2},\dots,z_n)$ koja je dobijena od $n-1$-torke $(y_1,\dots,y_k,y_{k+2},\dots,y_n)$ zamenom svih pojavljivanja elementa a elementom e različitim od a i d, važi $f(z_1,\dots,z_k,a,z_{k+2},\dots,z_n) = d$. Medjutim, to je kontradikcija, jer $z_1,\dots,z_n \in A \setminus \{a\}$. Pošto je a proizvoljan element iz A, dobili smo da važi:

$$f(x_1,\dots,x_n) = x_{k+1} \text{ za sve } x_1,\dots,x_n \in A.$$

2) Pretpostavimo da je $f(a_1,\dots,a_n) = a \neq b$ za neke $a_1,\dots,a_n \in A$. Neka je $c \neq a$, $c \neq b$ i $(b_1,\dots,b_n)$ n-torka koja se dobija iz $(a_1,\dots,a_n)$ zamenom svih pojavljivanja elementa b elementom c. Tada je $f(b_1,\dots,b_n) = a$, na osnovu Leme 2.4. S druge strane, iz $f(a,\dots,a) = b$ sledi $f(b_1,\dots,b_n) = b$. Dakle, mora biti $f(x_1,\dots,x_n) = b$ za sve $x_1,\dots,x_n \in A$.

□

Sledeća lema igra važnu ulogu u dokazu glavne teoreme ovog odeljka.

Lema 2.5 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra takva da $E = EqvA \setminus Con\mathcal{A} \neq \emptyset$. Onda $\langle E, \subseteq \rangle$ ima minimalni element.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ i $\theta \in E$. Tada za neko $f \in F$ arnosti $n \geq 1$ postoje $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n \in A$ takvi da je $a_i \theta b_i$ za sve $i \in \{1,\dots,n\}$, ali ne važi $f(a_1,\dots,a_n)\theta f(b_1,\dots,b_n)$. Definišimo $\rho \subseteq A^2$ kao najmanju relaciju ekvivalencije na A koja sadrži $\{(a_i,b_i) \mid i \leq n\}$. Naravno, $\rho \subseteq \theta$, $\rho \in E$ i postoji samo konačno mnogo relacija $\sigma \in EqvA$ takvih da $\sigma \subseteq \rho$. Dakle, skup $\{\sigma \in E \mid \sigma \subseteq \rho\}$ ima minimalni element.
□

Sada možemo dati potreban i dovoljan uslov da $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ bude mreža.

Teorema 2.10 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ *je mreža;*
(b) $EqvA = Con\mathcal{A}$.

Dokaz. $(\Rightarrow)$
Pretpostavimo da je $EqvA \neq Con\mathcal{A}$ i neka $E = EqvA \setminus Con\mathcal{A}$. Kako je $E \neq \emptyset$, s obzirom na Lemu 2.5, $\langle E, \subseteq \rangle$ ima minimalni element θ. Pošto je $\theta \neq \Delta_A$, postoje različiti elementi $x_1, x_2 \in A$ takvi da $x_1 \theta x_2$. Kako je $\theta \neq A^2$, postoji element $c \in A$ takav da ne važi $x_1 \theta c$. Definišimo relaciju ekvivalencije $\rho \subseteq \theta$ na sledeći način:

$$x \rho y \iff (x \theta y \;\&\; x \neq x_1 \;\&\; y \neq x_1) \;\text{ ili }\; x = y = x_1.$$

Kako je θ minimalni element u E i $\rho \subseteq \theta$, sledi $\rho \in Con\mathcal{A}$. S obzirom na Teoremu 2.8, za svaku injekciju $\varphi : A/\rho \to \mathcal{P}(A)$ relacija ρ_φ je dobra relacija na $\mathcal{A}$. Definišimo injekcije $\varphi_1, \varphi_2 : A/\rho \to \mathcal{P}(A)$ tako da $\rho_{\varphi_1} \cap \rho_{\varphi_2} = \theta$:

$$\varphi_1(x/\rho) = \begin{cases} x/\theta & \text{ako } \neg x\theta x_2 \\ x_2/\theta \cup \{c\} & \text{ako } x = x_1 \\ x_2/\theta & \text{ako } x\theta x_2 \;\&\; x \neq x_1 \end{cases}$$

$$\varphi_2(x/\rho) = \begin{cases} x/\theta & \text{ako } \neg x\theta x_2 \\ x_2/\theta & \text{ako } x = x_1 \\ x_2/\theta \cup \{c\} & \text{ako } x\theta x_2 \;\&\; x \neq x_1 \end{cases}$$

Lako je videti da su φ_1 i φ_2 injekcije, pa su ρ_{φ_1} i ρ_{φ_2} dobre relacije takve da $\rho_{\varphi_1} \cap \rho_{\varphi_2} = \theta$. Slično, definišemo injekcije $\varphi_3, \varphi_4 : A/\rho \to \mathcal{P}(A)$ tako da za dobre relacije ρ_{φ_3} i ρ_{φ_4} važi $\rho_{\varphi_3} \cup \rho_{\varphi_4} = \theta$:

$$\varphi_3(x/\rho) = \begin{cases} x/\theta & \text{ako } \neg x\theta x_2 \\ x_2/\theta \setminus \{x_2\} & \text{ako } x = x_1 \\ x_2/\theta & \text{ako } x\theta x_2 \;\&\; x \neq x_1 \end{cases}$$

$$\varphi_4(x/\rho) = \begin{cases} x/\theta & \text{ako } \neg x\theta x_2 \\ x_2/\theta & \text{ako } x = x_1 \\ x_2/\theta \setminus \{x_2\} & \text{ako } x\theta x_2 \;\&\; x \neq x_1 \end{cases}$$

Tada dobre relacije ρ_{φ_1} i ρ_{φ_2} nemaju infimum u $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ zato što

$$\inf(\rho_{\varphi_1}, \rho_{\varphi_2}) \subseteq \rho_{\varphi_1} \cap \rho_{\varphi_2} = \theta,$$

$$\rho_{\varphi_3} \cup \rho_{\varphi_4} = \theta \subseteq \inf(\rho_{\varphi_1}, \rho_{\varphi_2}).$$

Prema tome, imali bismo $\theta = \inf(\rho_{\varphi_1}, \rho_{\varphi_2})$, što je kontradikcija sa $\theta \notin G(\mathcal{A})$.
$(\Leftarrow)$
S obzirom na Teoremu 2.9, ako $EqvA = Con\mathcal{A}$, onda $G(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(A^2)$, pa je $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ mreža.
□

2.4 Proširene teoreme o izomorfizmu i kvazi-kongruencije

U odeljku 2.2 uveli smo pojam dobre faktor relacije sa ciljem da uopštimo pojam faktor algebre za relacije koje ne moraju biti kongruencije. Sada se postavlja pitanje da li se poznate teoreme o izomorfizmu koje važe za kongruencije mogu proširiti na klasu $G(\mathcal{A})$. Odgovor je, nažalost, negativan. Primeri koji slede ilustruju probleme koji se pojavljuju.

Primer 2.10 *Neka je* $A = \{0,1,2,3,4\}$, $R = \{(0,2),(1,3),(2,4),(3,1),(4,0)\}$, $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$, $f(3) = 4$, $f(4) = 3$. *Tada je* R *dobra relacija na* $\mathcal{A} = \langle A, f\rangle$. *Medjutim, za* $B = \{0,1,2\}$, $R_{|B} = R \cap B^2$ *nije dobra relacija na podalgebri* $\mathcal{B}$ *algebre* $\mathcal{A}$.

Primer 2.11 *Neka je* $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ *proizvoljna algebra i* $a,b,c \in A$. *Ako je* $R = \{(a,a),(a,b),(a,c)\}$, *tada* $R \in G(\mathcal{A})$. *Ako faktor relaciju definišemo na uobičajeni način (kao kod kongruencija), relacija* R/R *nije dobro definisana jer* $(a,c) \in R \Rightarrow (a/R, c/R) \in R/R$, *a s druge strane,* $(b,c) \notin R \Rightarrow (a/R,c/R) = (b/R,c/R) \notin R/R$.

Da bismo prevazišli ove teškoće, moramo da se ograničimo na neke uže klase dobrih relacija (koje su, naravno, šire od kongruencija). Tako dolazimo do sledećih klasa

Definicija 2.4 *Neka je* $\mathcal{A}$ *algebra i* $R \subseteq A^2$.

(a) *Kažemo da je* R **kvazi-ekvivalencija** *na* A *ako za sve* $x,y \in A$

$$x/R = y/R \iff xRy \;\&\; yRx.$$

Skup svih kvazi-ekvivalencija na A *označavaćemo sa* $QEqvA$.

(b) R *je* **kvazi-kongruencija** *na* $\mathcal{A}$ *ako je* R *dobra kvazi-ekvivalencija. Skup svih kvazi-kongruencija na* $\mathcal{A}$ *označavaćemo sa* $QCon\mathcal{A}$.

(c) R *je* **B-kvazi-kongruencija** *na* $\mathcal{A}$ *ako je* R *kompatibilna kvazi-ekvivalencija. Skup svih B-kvazi-kongruencija na* $\mathcal{A}$ *označavaćemo sa* $BQCon\mathcal{A}$.

(d) *Kažemo da je* R **dvostrana kvazi-kongruencija** *na* $\mathcal{A}$ *ako* $R \in QCon\mathcal{A}$ *i za sve* $x,y,z \in A$ *važi*

$$xRy \;\&\; yRx \;\&\; xRz \Rightarrow yRz.$$

Skup svih dvostranih kvazi-kongruencija na $\mathcal{A}$ *označavamo sa* $TSQCon\mathcal{A}$.

Pojam kvazi-ekvivalencije i B-kvazi-kongruencije uveli su Brink, Jacobs, Nelte i Sekaran u [8], s tim što oni B-kvazi-kongruencije nazivaju kvazi-kongruencijama.

Lema 2.6 *Relacija R je kvazi-ekvivalencija na skupu A ako i samo ako je R refleksivna relacija i za sve $x,y,z \in A$ važi*

$$xRy \ \& \ yRx \ \& \ zRx \Rightarrow zRy. \tag{2.5}$$

Dokaz. Ako je $R \in QEqvA$, tada iz $x/R = x/R$ sledi xRx. Dalje, iz xRy, yRx i zRx sledi $x/R = y/R$ i $z \in x/R$, pa $z \in y/R$, odnosno zRy. Obrnuto, iz refleksivnosti relacije R dobijamo $x/R = y/R \Rightarrow xRy \ \& \ yRx$, a iz uslova (2.5) sledi $xRy \ \& \ yRx \Rightarrow x/R = y/R$.
□

Koristeći Lemu 2.6 lako je dokazati sledeća tvrdjenja

Posledica 2.4 *Svaka refleksivna i tranzitivna relacija na A je kvazi-ekvivalencija.*

Posledica 2.5 *Svaka refleksivna i antisimetrična relacija na A je dvostrana kvazi-kongruencija na proizvoljnoj algebri $\mathcal{A}$ sa nosačem A.*

Sledeće tvrdjenje se dokazuje jednostavnim kombinovanjem definicija kvazi-ekvivalencije i dobre relacije.

Lema 2.7 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ algebra i $R \in QEqvA$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $R \in QCon\mathcal{A}$

(b) *Za sve $f \in F$, ako je $ar(f) = n$ onda za sve $x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n \in A$ važi*

$$(\forall i \leq n)(x_iRy_i \ \& \ y_iRx_i) \Rightarrow (f(x_1,\ldots,x_n)Rf(y_1,\ldots,y_n) \ \&$$

$$f(y_1,\ldots,y_n)Rf(x_1,\ldots,x_n))$$

Posledica 2.6 *Svaka B-kvazi-kongruencija je kvazi-kongruencija (a samim tim i dobra relacija).*

U opštem slučaju, $TSQCon\mathcal{A}$ je pravi podskup od $QCon\mathcal{A}$ i neuporedivo sa $BQCon\mathcal{A}$.

Primer 2.12 *Neka je* $A = \{a,b,c\}$, $f(a) = f(b) = a$, $f(c) = c$, $\mathcal{A} = \langle A, f\rangle$, $R = \{(a,a),(b,a),(a,b),(b,b),(a,c),(c,c)\}$, $S = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,c)\}$.
Tada $R \in BQCon\mathcal{A} \setminus TSQCon\mathcal{A}$ *i* $S \in TSQCon\mathcal{A} \setminus BQCon\mathcal{A}$.

Sledeća lema biće nam od koristi u nastavku.

Lema 2.8 *Svaka simetrična kvazi-kongruencija je kongruencija.*

Dokaz. Neka je R simetrična kvazi-kongruencija na algebri $\mathcal{A}$. Tada imamo: xRy & $yRz \Rightarrow xRy$ & yRz & $zRy \Rightarrow xRz$. Dakle, R je relacija ekvivalencije, a svaka dobra relacija ekvivalencije je kongruencija (Primer 2.4).
□

Uvodjenje novih klasa relacija omogućuje nam da dokažemo uopštene verzije teorema o izomorfizmu.

Definicija 2.5 *Neka je* $\mathcal{A}$ *algebra,* B *poduniverzum od* $\mathcal{A}$, $R \subseteq A^2$. *Definišemo* $B^R \subseteq A$ *kao*

$$B^R = \{a \in A \mid (\exists b \in B)\ a/R = b/R\}.$$

Lema 2.9 *Neka je* $\mathcal{A}$ *algebra i* $\mathcal{B}$ *podalgebra od* $\mathcal{A}$. *Tada*

(a) *Ako* $R \in QCon\mathcal{A}$ *onda* $R_{|B} \in QCon\mathcal{B}$.
(b) *Ako* $R \in G(\mathcal{A})$ *onda je* B^R *poduniverzum od* $\mathcal{A}$.

Dokaz.

(a) Sledi direktno iz Leme 2.6 i Leme 2.7.
(b) Neka je f n-arna operacija algebre $\mathcal{A}$ i $a_1,\ldots,a_n \in B^R$. Tada postoje elementi $b_1,\ldots,b_n$ skupa B takvi da je $a_1/R = b_1/R,\ldots,a_n/R = b_n/R$. Kako je R dobra relacija, imamo $f(a_1,\ldots,a_n)/R = f(b_1,\ldots,b_n)/R$ i $f(b_1,\ldots,b_n) \in B$, odakle sledi $f(a_1,\ldots,a_n) \in B^R$.

□

Ako $R \in G(\mathcal{A})$ i $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$, podalgebru od $\mathcal{A}$ čiji je nosač B^R označavaćemo sa $\mathcal{B}^R$.

Sada imamo sve što nam je potrebno za dokaz uopštene verzije prve teoreme o izomorfizmu.

Teorema 2.11 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra, $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$ i $R \in QConA$. Tada*

$$\mathcal{B}/R_{|B} \cong \mathcal{B}^R/R_{|B^R}.$$

Dokaz. S obzirom na Lemu 2.9, algebre $\mathcal{B}/R_{|B}$ and $\mathcal{B}^R/R_{|B^R}$ su dobro definisane. Neka je $\Phi : B/R_{|B} \to B^R/R_{|B^R}$ preslikavanje definisano na prirodan način:

$$\Phi(b/R_{|B}) = b/R_{|B^R}.$$

Lako je dokazati da je Φ izomorfizam.
□

Definicija 2.6 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra, $R,S \in TSQCon\mathcal{A}$, $R \subseteq S$. Relacija $S/R \subseteq A/R \times A/R$ je definisana sa*

$$(a/R,b/R) \in S/R \Leftrightarrow (a,b) \in S.$$

Lema 2.10 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra, $R,S \in TSQCon\mathcal{A}$, $R \subseteq S$. Tada je S/R dvostrana kvazi-kongruencija algebre $\mathcal{A}/R$.*

Dokaz. Najpre ćemo dokazati da Definicija 2.6 ima smisla, odnosno da je relacija S/R dobro definisana. Neka $(a/R,b/R) \in S/R$ i $a/R = c/R$, $b/R = d/R$. Tada je aRc, cRa, bRd, dRb i aSb. S obzirom da je $R \subseteq S$ i $S \in TSQCon\mathcal{A}$ imamo:

$$aSc \;\&\; cSa \;\&\; aSb \Rightarrow cSb;$$

$$bSd \;\&\; dSb \;\&\; cSb \Rightarrow cSd \Rightarrow (c/R,d/R) \in S/R.$$

Dakle, faktor relacija je dobro definisana i sada nije teško pokazati da se sve osobine dvostranih kvazi-kongruencija prenose sa R i S na relaciju S/R.
□

Sada možemo formulisati i dokazati uopštenu verziju druge teoreme o izomorfizmu.

Teorema 2.12 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra, $R,S \in TSQCon\mathcal{A}$, $R \subseteq S$. Tada*

$$\mathcal{A}/R\Big/S/R \cong \mathcal{A}/S.$$

Dokaz. S obzirom na Lemu 2.10, algebra $\mathcal{A}/R\Big/S/R$ je dobro definisana. Definišimo preslikavanje $\Phi : A/R\Big/S/R \to A/S$ na prirodan način:

$$\Phi(a/R\Big/S/R) = a/S.$$

Tada je lako dokazati da je Φ izomorfizam.
□

2.5 O mrežama kvazi-kongruencija

U ovom odeljku detaljnije ćemo ispitivati klase relacija definisane u prethodnom odeljku. Videli smo već da $\subseteq$-uredjeni skup dobrih relacija nema "lepu" strukturu (u smislu da skoro nikada nije mreža). U [8] je pokazano da je za svaku algebru $\mathcal{A}$ skup $BQCon\mathcal{A}$ zatvoren u odnosu na proizvoljne preseke, i samim tim $\langle BQCon\mathcal{A}, \subseteq\rangle$ je kompletna mreža. Lako je pokazati da isto važi za skupove $QEqvA$, $QCon\mathcal{A}$ i $TSQCon\mathcal{A}$. Ustvari, možemo dokazati i nešto više.

Teorema 2.13 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra tipa $\mathcal{F}$ sa nosačem A. Tada su $\langle QEqvA, \subseteq\rangle$, $\langle QCon\mathcal{A}, \subseteq\rangle$, $\langle BQCon\mathcal{A}, \subseteq\rangle$, $\langle TSQCon\mathcal{A}, \subseteq\rangle$ algebarske mreže.*

Dokaz. U svim slučajevima definisaćemo algebru $\mathcal{B}$ na skupu $A \times A$ tako da $Sub\mathcal{B}$ (skup svih poduniverzuma algebre $\mathcal{B}$) bude jednak odgovarajućem skupu kvazi-ekvivalencija. Kako je $\langle Sub\mathcal{B}, \subseteq\rangle$ algebarska mreža, time će tvrdjenje biti dokazano.

- Slučaj $\langle QEqvA, \subseteq \rangle$:
S obzirom na Lemu 2.6, $R \subseteq A^2$ je kvazi-ekvivalencija ako i samo ako je R refleksivna relacija i za sve $x,y,z \in A$ važi

$$xRy \;\&\; yRx \;\&\; zRx \Rightarrow zRy.$$

Prema tome, fundamentalne operacije algebre $\mathcal{B}$ biće:
-nularna operacija (a,a) za svako $a \in A$;
-ternarna operacija $t : B^3 \to B$ definisana sa

$$t((a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)) = \begin{cases} (c_1,a_2) & \text{ako } a_1 = b_2 = c_2 \text{ i } a_2 = b_1 \\ (a_1,a_2) & \text{inače} \end{cases}$$

Tada je $Sub\mathcal{B} = QEqvA$, pa je $\langle QEqvA, \subseteq \rangle$ algebarska mreža.

- Slučaj $\langle BQCon\mathcal{A}, \subseteq \rangle$:
Fundamentalne operacije algebre $\mathcal{B}$ su sve operacije definisane u prethodnom slučaju i za sve $f \in \mathcal{F}$ operacije $f^{\mathcal{B}}$ definisane na sledeći način: ako je $ar(f) = n$, tada je $ar(f^{\mathcal{B}}) = n$ i za sve $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n \in A$ važi

$$f^{\mathcal{B}}((a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)) = (f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1,\ldots,b_n)).$$

Tada je $Sub\mathcal{B} = BQCon\mathcal{A}$, što znači da je $\langle BQCon\mathcal{A}, \subseteq \rangle$ algebarska mreža.

- Slučaj $\langle QCon\mathcal{A}, \subseteq \rangle$:
Fundamentalne operacije algebre $\mathcal{B}$ su sve operacije definisane u slučaju $QEqvA$ i za sve $f \in \mathcal{F}$ operacije $f_1^{\mathcal{B}}$, $f_2^{\mathcal{B}}$ definisane na sledeći način: ako je $ar(f) = n$, tada je $ar(f_1^{\mathcal{B}}) = ar(f_2^{\mathcal{B}}) = 2n$ i za sve $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$, $c_1,\ldots,c_n,d_1,\ldots,d_n \in A$ važi

$$f_1^{\mathcal{B}}((a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n),(c_1,d_1),\ldots,(c_n,d_n)) =$$

$$\begin{cases} (f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n), f^{\mathcal{A}}(b_1,\ldots,b_n)) & \text{ako } c_i = b_i \text{ i } d_i = a_i \text{ za sve } i \leq n \\ (a_1,b_1) & \text{inače} \end{cases}$$

$$f_2^{\mathcal{B}}((a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n),(c_1,d_1),\ldots,(c_n,d_n)) =$$

$$\begin{cases} (f^{\mathcal{A}}(b_1,\ldots,b_n), f^{\mathcal{A}}(a_1,\ldots,a_n)) & \text{ako } c_i = b_i \;\&\; d_i = a_i \text{ za sve } i \leq n \\ (a_1,b_1) & \text{inače} \end{cases}$$

S obzirom na Lemu 2.7, $Sub\mathcal{B} = QCon\mathcal{A}$, pa je $\langle QCon\mathcal{A}, \subseteq\rangle$ algebarska mreža.

- Slučaj $\langle TSQCon\mathcal{A}, \subseteq\rangle$:
  Fundamentalne operacije algebre $\mathcal{B}$ su sve operacije definisane u prethodnom slučaju, kao i ternarna operacija t' definisana na sledeći način:

$$t'((a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)) = \begin{cases} (a_2,c_2) & \text{ako } b_1 = a_2 \;\&\; b_2 = c_1 = a_1 \\ (a_1,a_2) & \text{inače} \end{cases}$$

  Tada je $Sub\mathcal{B} = TSQCon\mathcal{A}$ i $\langle TSQCon\mathcal{A}, \subseteq\rangle$ je algebarska mreža.

□

U [8] je dokazano da je $\langle Con\mathcal{A}, \subseteq\rangle$ podmreža od $\langle BQCon\mathcal{A}, \subseteq\rangle$. Da bismo dokazali jedno opštije tvrdjenje tog tipa, potrebna nam je sledeća lema.

Lema 2.11 *Za sve R,S* $\in QEqvA$ *važi*

(a) $R \subseteq S \Rightarrow \varepsilon(R) \subseteq \varepsilon(S)$.
(b) $\varepsilon(R) \subseteq R$.

Teorema 2.14 *Neka je* Σ *skup kvazi-kongruencija neke algebre* $\mathcal{A}$ *takav da je* $Con\mathcal{A} \subseteq \Sigma$ *i* Σ *je zatvoren u odnosu na (konačne) preseke. Ako je* $\langle \Sigma, \subseteq\rangle$ *mreža, tada je* $\langle Con\mathcal{A}, \subseteq\rangle$ *podmreža od* $\langle \Sigma, \subseteq\rangle$.

Dokaz. Kako je skup Σ zatvoren u odnosu na preseke, infimum u $\langle \Sigma, \subseteq\rangle$ se poklapa sa presekom, kao i u $Con\mathcal{A}$. Prema tome, treba samo pokazati da se supremumi poklapaju u ovim mrežama.

Neka ρ, $\sigma \in Con\mathcal{A}$ i $\theta = \sup_{\Sigma}(\rho,\sigma)$. Primetimo da je dovoljno dokazati da je θ kongruencija, jer odatle sledi $\theta = \sup_{Con\mathcal{A}}(\rho,\sigma)$. S obzirom na Lemu 2.11, pošto je $\rho \subseteq \theta$ i $\sigma \subseteq \theta$ i sve te relacije su kvazi-ekvivalencije, važi $\varepsilon(\rho) \subseteq \varepsilon(\theta)$ i $\varepsilon(\sigma) \subseteq \varepsilon(\theta)$. Ali $\rho,\sigma \in Con\mathcal{A}$ odakle sledi $\varepsilon(\rho) = \rho$ i $\varepsilon(\sigma) = \sigma$, i.e. $\rho \subseteq \varepsilon(\theta)$ i $\sigma \subseteq \varepsilon(\theta)$. kako $\theta \in QCon\mathcal{A} \subseteq G(\mathcal{A})$, imamo $\varepsilon(\theta) \in Con\mathcal{A}$, odakle dobijamo $\theta \subseteq \varepsilon(\theta)$. Na osnovu Leme 2.11 važi $\varepsilon(\theta) \subseteq \theta$, pa je $\varepsilon(\theta) = \theta$, što znači $\theta \in Con\mathcal{A}$.
□

Specijalno, za posmatrane klase kvazi-kongruencija važi

Posledica 2.7 *Za svaku algebru* $\mathcal{A}$, $\langle Con\mathcal{A}, \subseteq\rangle$ *je podmreža sledećih mreža:* $\langle QCon\mathcal{A}, \subseteq\rangle$, $\langle BQCon\mathcal{A}, \subseteq\rangle$, $\langle TSQCon\mathcal{A}, \subseteq\rangle$.

Dokaz. Sledi iz Teoreme 2.14.
□

Isto važi i za mrežu kvazi-ekvivalencija

Posledica 2.8 *Za svaku algebru* $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$, *mreža* $\langle Con\mathcal{A}, \subseteq\rangle$ *je podmreža mreže* $\langle QEqvA, \subseteq\rangle$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{B}$ algebra sa nosačem A takva da su sve fundamentalne operacije algebre $\mathcal{B}$ projekcije. Tada je svaka refleksivna relacija na A kompatibilna na $\mathcal{B}$, pa je $Con\mathcal{B} = EqvA$ i $BQCon\mathcal{B} = QEqvA$. Prema tome, s obzirom na Posledicu 2.7, $EqvA$ je podmreža od $QEqvA$. Kako je $Con\mathcal{A}$ podmreža od $EqvA$ za svaku algebru $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$, odatle sledi da je $Con\mathcal{A}$ podmreža od $QEqvA$.
□

Poznato je da je mreža kongruencija neke algebre podmreža mreže ekvivalencija. Kako su kvazi-kongruencije, B-kvazi-kongruencije i dvostrane kvazi-kongruencije uopštenja kongruencija, moglo bi se očekivati da sve te mreže budu podmreže mreže kvazi-ekvivalencija. Medjutim, pokazalo se da to ne mora da važi.

Primer 2.13 *Neka je* $A = \{a,b,c\}$, $f(a) = f(c) = c$, $f(b) = b$, $\mathcal{A} = \langle A, f\rangle$, $R = \{(a,b)\} \cup \Delta$, $S = \{(b,a)\} \cup \Delta$. *Tada* $R, S, R \cup S \in QEqvA$ *i* $\sup(R,S) = R \cup S$. *S druge strane,* $R, S \in QCon\mathcal{A}$ *ali* $R \cup S \notin QCon\mathcal{A}$, *jer* $(a,b) \in R \cup S$, $(b,a) \in R \cup S$ *ali* $(f(a), f(b)) \notin R \cup S$.

Primer 2.14 *Neka je* $A = \{a,b,c,d,1,2,3,4\}$, $\mathcal{A} = \langle A, f\rangle$ *gde je* $f : A^2 \to A$ *definisano na sledeći način:*
$f(a,c) = 1$, $f(b,c) = 2$, $f(a,d) = 3$, $f(b,d) = 4$ *i* $f(x,y) = 1$ *za sve ostale parove* $(x,y) \in A^2$.
Ako je $R = \{(a,b),(1,2),(3,4)\} \cup \Delta$ *i* $S = \{(c,d),(1,3),(2,4)\} \cup \Delta$, *tada* $R, S \in BQCon\mathcal{A}$, $R \cup S \in QEqvA$, *ali* $R \cup S \notin BQCon\mathcal{A}$ *jer* $(a,b) \in R \cup S$, $(c,d) \in R \cup S$, *ali* $(f(a,c), f(b,d)) = (1,4) \notin R \cup S$.

Teorema 2.15

(a) Mreže $QCon\mathcal{A}$,$BQCon\mathcal{A}$,$TSQCon\mathcal{A}$ ne moraju biti podmreže od $QEqvA$.

(b) Mreže $BQCon\mathcal{A}$ i $TSQCon\mathcal{A}$ ne moraju biti podmreže od $QCon\mathcal{A}$.

Dokaz.

(a) Primer 2.13 pokazuje da $QCon\mathcal{A}$ ne mora biti podmreža od $QEqvA$.
Ovaj primer takodje pokazuje da $TSQCon\mathcal{A}$ nije uvek podmreža od $QEqvA$ jer R,S,$R \cup S \in QEqvA$, R,$S \in TSQCon\mathcal{A}$, ali $R \cup S \notin TSQCon\mathcal{A}$.
Primer 2.14 pokazuje da $BQCon\mathcal{A}$ ne mora biti podmreža od $QEqvA$.

(b) Primer 2.14 takodje pokazuje da $BQCon\mathcal{A}$ nije uvek podmreža od $QCon\mathcal{A}$ jer R,$S \in BQCon\mathcal{A}$, $R \cup S \in QCon\mathcal{A}$, ali $R \cup S \notin BQCon\mathcal{A}$.
Konačno, neka je $\mathcal{A}$ algebra iz Primera 2.14 i $R = \{(a,b),(1,2),(3,4)\} \cup \Delta$, $S = \{c,d),(1,3),(2,4),(2,1)\} \cup \Delta$. Tada R,$S \in TSQCon\mathcal{A}$, $R \cup S \in QCon\mathcal{A}$, ali $R \cup S \notin TSQCon\mathcal{A}$ jer $(1,2) \in R \cup S$, $(2,1) \in R \cup S$, $(1,3) \in R \cup S$ i $(2,3) \notin R \cup S$.

□

Klase relacija koje smo definisali u prošlom odeljku su, generalno govoreći, medjusobno različite, ali dešava se da se neke od tih klasa poklapaju. Tako na primer, postoje algebre $\mathcal{A}$ kod kojih je $QEqvA = QCon\mathcal{A}$ i nije teško opisati ih. Ustvari, to je klasa algebri iz Teoreme 2.9.

Teorema 2.16 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ algebra i $|A| \geq 3$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $QEqvA = QCon\mathcal{A}$,

(b) $QEqvA = BQCon\mathcal{A}$,

(c) $EqvA = Con\mathcal{A}$.

Dokaz.
$(a) \Rightarrow (c)$
Ako je $QEqvA = QCon\mathcal{A}$ tada je $QEqvA \subseteq G(\mathcal{A})$, te je stoga $EqvA \subseteq G(\mathcal{A})$. Odatle dobijamo da je $\varepsilon(R)$ kongruencija za sve $R \in EqvA$, i kako je $\varepsilon(R) = R$,

zaključujemo da je $EqvA = Con\mathcal{A}$.
$(c) \Rightarrow (b)$
Neka je $EqvA = Con\mathcal{A}$. Na osnovu Teoreme 2.9, Sve fundamentalne operacije algebre $\mathcal{A}$ moraju biti projekcije ili konstante. Tada je svaka refleksivna relacija kompatibilna na $\mathcal{A}$, pa je $QEqvA = BQCon\mathcal{A}$.
$(b) \Rightarrow (a)$
Očigledno.
□

Ako je $|A| = 2$, uslovi (a) i (c) važe za svaku algebru $\mathcal{A}$, ali uslov (b) nije uvek ispunjen.

Lako je primetiti da je za svaku netrivijalnu algebru $\mathcal{A}$, $QCon\mathcal{A} \neq Con\mathcal{A}$ i $TSQCon\mathcal{A} \neq Con\mathcal{A}$. Prema tome, od problema ovog tipa ostaje još da se opišu algebre $\mathcal{A}$ takve da je $BQCon\mathcal{A} = Con\mathcal{A}$ (zvaćemo ih B-kvazi-kongruencijski-trivijalne algebre). Sledeće tvrdjenje daje nam jednu klasu algebri koje zadovoljavaju taj uslov.

Teorema 2.17 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra koja ima term Maljceva. Tada je $BQCon\mathcal{A} = Con\mathcal{A}$.*

Dokaz. Ako je $p(x,y,z)$ term Maljceva, onda na $\mathcal{A}$ važi $p(x,x,y) \approx p(y,x,x) \approx y$. Neka je xRy i $R \in BQCon\mathcal{A}$. Tada imamo

$$(yRy \;\&\; xRy \;\&\; xRx) \Rightarrow p(y,x,x)Rp(y,y,x) \Rightarrow yRx.$$

Prema tome, R je simetrična relacija i na osnovu Leme 2.8, $R \in Con\mathcal{A}$.
□

Posledica 2.9 *Neka je V kongruencijski permutabilan varijetet. Tada za sve $\mathcal{A} \in V$, $BQCon\mathcal{A} = Con\mathcal{A}$.*

Dokaz. Sledi iz Teoreme 2.17 i poznate teoreme Maljceva po kojoj je varijetet kongruencijski permutabilan ako i samo ako ima term Maljceva.
□

Sledeći primeri pokazuju da postoje B-kvazi-kongruencijski-trivijalne algebre koje nisu kongruencijski permutabilne i kongruencijski distributivni varijeteti koji nisu B-kvazi-kongruencijski-trivijalni.

Primer 2.15 *Neka je $A = \{a,b,c\}$, $f(a) = f(c) = b$, $f(b) = a$, $g(a) = g(b) = c$, $g(c) = a$, $\mathcal{A} = \langle A, \{f,g\}\rangle$. Ako $R \in BQCon\mathcal{A}$, tada važi sledeće:*

$$(a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R, \quad (a,c) \in R \Leftrightarrow (c,a) \in R.$$

Takodje, ako $(b,c) \in R$ onda

$$(f(b), f(c)) = (a,b) \in R; \tag{2.6}$$

$$(g(b), g(c)) = (c,a) \in R; \tag{2.7}$$

$$(f^2(b), f^2(c)) = (b,a) \in R. \tag{2.8}$$

Sada direktno iz (2.6),(2.7),(2.8) i definicije kvazi-ekvivalencije sledi $(c,b) \in R$. Na sličan način možemo pokazati da važi $(c,b) \in R \Rightarrow (b,c) \in R$. Dakle, svaka B-kvazi-kongruencija na $\mathcal{A}$ je simetrična, pa je $\mathcal{A}$, s obzirom na Lemu 2.8, B-kvazi-kongruencijski-trivijalna algebra.

Neka je $S = \Delta_A \cup \{(a,b),(b,a)\}$ i $T = \Delta_A \cup \{(a,c),(c,a)\}$. Tada $S,T \in Con\mathcal{A}$ i $S \circ T \neq T \circ S$, pa $\mathcal{A}$ nije kongruencijski-permutabilna algebra.

Primer 2.16 *Neka je $\mathcal{L} = \langle L, \vee, \wedge\rangle$ proizvoljna mreža i $\leq$ odgovarajuća relacija poretka na L. Tada je $\leq$ B-kvazi-kongruencija koja, naravno, nije kongruencija na $\mathcal{L}$. Prema tome, varijetet svih mreža je kongruencijski-distributivan varijetet koji nije B-kvazi-kongruencijski-trivijalan.*

Sledeća pitanja u vezi B-kvazi-kongruencija ostaju otvorena:

- Da li je tačno da za svaku algebarsku mrežu $\mathcal{L}$, postoji algebra $\mathcal{A}$ takva da je $\mathcal{L} \cong BQCon\mathcal{A}$?
- Opisati B-kvazi-kongruencijski-trivijalne algebre (varijetete).

2.6 Stepenovanje dobrih relacija i stepene teoreme o izomorfizmu

Videli smo da dobre faktor relacije ne daju do na izomorfizam nove algebre (jer $\mathcal{A}/R \cong \mathcal{A}/\varepsilon(R)$). Ali, bez obzira na to, ima smisla izučavati $G(\mathcal{A})$. Prvi razlog je taj što se ne može "u životu" (na primer u računarstvu) očekivati da sve relacije koje srećemo budu kongruencije, a imamo potrebu za formiranjem i faktor struktura i stepenih struktura. Drugi razlog jeste što se unutrašnja struktura dobrih relacija može bitno razlikovati. Postoji, na primer, velika razlika izmedju dobrih relacija u odnosu na stepenovanje: za neke $R \in G(\mathcal{A})$ imamo $R^+ \in G(\mathcal{P}(\mathcal{A}))$, a za neke druge to ne važi. Ovo u stvari znači da teoremu 2.2 koja kaže da je algebra kompleksa faktor algebre izomorfna faktor algebri algebre kompleksa, ne možemo uopštiti za dobre relacije, nego opet moramo tražiti neku užu klasu relacija za koju je to moguće uraditi. To nas dovodi do sledećih definicija.

Definicija 2.7 *([8]) Neka je $\mathcal{A}$ algebra i $R \subseteq A^2$.*

(a) Kažemo da je R **vrlo dobra relacija** *na $\mathcal{A}$ ako je R^+ dobra relacija na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Skup svih vrlo dobrih relacija na $\mathcal{A}$ označavaćemo sa $G^+(\mathcal{A})$.*

(b) R je **H-dobra relacija** *(Hoare dobra relacija) na $\mathcal{A}$ ako je $R^{\rightarrow}$ dobra relacija na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Skup svih H-dobrih relacija na $\mathcal{A}$ označavaćemo sa $G^{\rightarrow}(\mathcal{A})$.*

(c) R je **S-dobra relacija** *(Smyth dobra relacija) na $\mathcal{A}$ ako je $R^{\leftarrow}$ dobra relacija na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Skup svih S-dobrih relacija na $\mathcal{A}$ označavaćemo sa $G^{\leftarrow}(\mathcal{A})$.*

Lema 2.12 *Neka je R vrlo dobra (H-dobra, S-dobra) relacija algebre $\mathcal{A}$. Tada $R \in G(\mathcal{A})$.*

Dokaz. Neka je f n-arna operacija algebre $\mathcal{A}$ i $R \in G^+(\mathcal{A})$ pri čemu je $x_1/R = y_1/R, \ldots, x_n/R = y_n/R$. Tada za sve $i \leq n$ važi

$$\{x_i\}/R^+ = \mathcal{P}_+(x_i/R) = \mathcal{P}_+(y_i/R) = \{y_i\}/R^+.$$

Kako je R vrlo dobra relacija sledi

$$\mathcal{P}_+(f(x_1, \ldots, x_n)/R) = \{f(x_1, \ldots, x_n)\}/R^+ =$$

$$f^+(\{x_1\},\ldots,\{x_n\})/R^+ = f^+(\{y_1\},\ldots,\{y_n\})/R^+ =$$
$$\{f(y_1,\ldots,y_n)\}/R^+ = \mathcal{P}_+(f(y_1,\ldots,y_n)/R).$$

Odatle dobijamo $f(x_1,\ldots,x_n)/R = f(y_1,\ldots,y_n)/R$, što znači da je R dobra relacija algebre $\mathcal{A}$. Dokaz je sličan za H-dobre i S-dobre relacije.
$\square$

Suprotni smer tvrdjenja Leme 2.12 ne mora da važi.

Primer 2.17 *Neka je $A = \{1,2,3\}$ i $\leq$ je uobičajeni poredak na A. Definišimo preslikavanje $f : A \to A$ sa $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 3$. Tada je $\leq$ dobra relacija na $\mathcal{A} = \langle A, f\rangle$, ali $\leq$ nije ni H-dobra, ni S-dobra ni vrlo dobra relacija na $\mathcal{A}$.*

Naravno, za svaku algebru $\mathcal{A}$ postoje vrlo dobre (H-dobre, S-dobre) relacije na $\mathcal{A}$. Kako svaki od tri posmatrana načina stepenovanja relacija čuva svojstva refleksivnosti, tranzitivnosti i kompatibilnosti, sva kompatibilna kvazi-uredjenja (specijalno sve kongruencije) su vrlo dobre, H-dobre i S-dobre relacije. Ustvari, sada možemo proširiti ono što je konstatovano u Primeru 2.4.

Lema 2.13 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra i $R \in EqvA$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $R \in Con\mathcal{A}$;
(b) $R \in G(\mathcal{A})$;
(c) $R \in G^+(\mathcal{A})$;
(d) $R \in G^{\rightarrow}(\mathcal{A})$;
(e) $R \in G^{\leftarrow}(\mathcal{A})$.

Slično tvrdjenje za kvazi-uredjenja dokazaćemo nešto kasnije.

Nije teško videti da ni jedan od skupova $G(\mathcal{A})$, $G^+(\mathcal{A})$, $G^{\rightarrow}(\mathcal{A})$ i $G^{\leftarrow}(\mathcal{A})$, gde je $\mathcal{A}$ neka algebra, nije zatvoren u odnosu na uniju i presek.

Primer 2.18 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ proizvoljna prosta algebra na $A = \{a,b,c\}$, $R = \{(a,b),(b,c),(c,a)\}$, $S = \{(a,b),(b,a),(c,c)\}$. Tada su R i S vrlo dobre, H-dobre i S-dobre relacije (samim tim i dobre), ali $R \cap S$ i $R \cup S$ nisu dobre relacije (prema tome ni vrlo dobre, H-dobre ni S-dobre).*

S druge strane, iz činjenice da je $\varepsilon(R) = \varepsilon(\overline{R})$ za proizvoljnu relaciju R, sledi da je $G(\mathcal{A})$ zatvoren u odnosu na komplementiranje (s obzirom na A^2). Medjutim, skupovi $G^+(\mathcal{A})$ i $G^\rightarrow(\mathcal{A})$ ne moraju biti zatvoreni u odnosu na komplementiranje, što pokazuju sledeća dva primera.

Primer 2.19 *Neka je $\mathcal{A} = \langle \{a,b,c\}, f\rangle$, gde je $ar(f) = 1$ i $f(a) = a$, $f(b) = b$, $f(c) = a$. Ako uzmemo relaciju $R = \{(c,a),(b,b),(a,c)\}$, tada je R H-dobra na $\mathcal{A}$, ali $\overline{R}$ nije H-dobra na $\mathcal{A}$.*

Primer 2.20 *Neka je $\mathcal{A} = \langle \{a,b\}, f\rangle$, gde je $f(a) = b$ i $f(b) = a$. Ako je $R = \{(a,a),(b,a),(a,b)\}$, onda je R vrlo dobra na $\mathcal{A}$, ali $\overline{R}$ nije vrlo dobra na $\mathcal{A}$.*

Kao što smo pokazali u Lemi 2.18, S-dobre relacije mogu se lepo opisati a da pritom koristimo samo polaznu relaciju, a ne i odgovarajuću stepenu relaciju. Koristeći tu karakterizaciju S-dobrih relacija, lako možemo pokazati da je skup $G^\leftarrow(\mathcal{A})$ zatvoren u odnosu na komplementiranje.

Teorema 2.18 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ algebra i $R \in G^\leftarrow(\mathcal{A})$. Tada $\overline{R} \in G^\leftarrow(\mathcal{A})$.*

Dokaz. Neka je f n-arna operacija iz F, $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n \in A$ i važi $x_1/\overline{R} \subseteq y_1/\overline{R},\dots,x_n/\overline{R} \subseteq y_n/\overline{R}$. S obzirom na Lemu 2.18, treba pokazati da važi

$$f(x_1,\dots,x_n)/\overline{R} \subseteq f(y_1,\dots,y_n)/\overline{R}.$$

Pošto je R S-dobra relacija imamo

$$x_1/\overline{R} \subseteq y_1/\overline{R},\dots,x_n/\overline{R} \subseteq y_n/\overline{R} \Rightarrow y_1/R \subseteq x_1/R,\dots,x_n/R \subseteq y_n/R \Rightarrow$$

$$f(y_1,\dots,y_n)/R \subseteq f(x_1,\dots,x_n)/R. \Rightarrow f(x_1,\dots,x_n)/\overline{R} \subseteq f(y_1,\dots,y_n)/\overline{R}.$$

□

Osobine relacija R^+, $R^\rightarrow$ i $R^\leftarrow$ koje ćemo sada navesti (i dokazati), poslužiće nam pri dokazivanju glavnih tvrdjenja ovog odeljka.

Definicija 2.8 *Neka je R binarna relacija na A. Tada za $X \subseteq A$ definišemo*

$$X' = \{y \in A \mid (\exists x \in X)\ yRx\}$$

Lema 2.14 *Neka je R binarna relacija na A. Tada za sve $X, Y \subseteq A$ važi*

(a) $X/R^{\rightarrow} = \mathcal{P}(X')$,
(b) $X/R^{\rightarrow} \subseteq Y/R^{\rightarrow} \iff X' \subseteq Y'$,
(c) $X/R^{\rightarrow} = Y/R^{\rightarrow} \iff X' = Y'$,
(d) $X \subseteq Y \Rightarrow X/R^{\rightarrow} \subseteq Y/R^{\rightarrow}$.

Lema 2.15 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ algebra i $R \subseteq A^2$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) *R je H-dobra relacija na $\mathcal{A}$.*
(b) *Za sve $f \in F$ i sve $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n \subseteq A$, gde je $ar(f) = n$, važi*

$$(\forall i \leq n)\, X_i/R^{\rightarrow} \subseteq Y_i/R^{\rightarrow} \Rightarrow f^+(X_1, \dots, X_n)/R^{\rightarrow} \subseteq f^+(Y_1, \dots, Y_n)/R^{\rightarrow}.$$

Dokaz. Očigledno je da iz *(b)* sledi $R \in G^{\rightarrow}(\mathcal{A})$. Pretpostavimo sada da je R H-dobra relacija i $X_i/R^{\rightarrow} \subseteq Y_i/R^{\rightarrow}$ za sve $i \in \{1, \dots, n\}$. Na osnovu Leme 2.14 *(b)* dobijamo $X_i' \subseteq Y_i'$. Kako je $(X_i \cup Y_i)' = X_i' \cup Y_i' = Y_i'$, imamo

$$(X_i \cup Y_i)/R^{\rightarrow} = Y_i/R^{\rightarrow}.$$

Pošto je R H-dobra relacija na $\mathcal{A}$, sledi

$$f^+(X_1 \cup Y_1, \dots, X_n \cup Y_n)/R^{\rightarrow} = f^+(Y_1, \dots, Y_n)/R^{\rightarrow}.$$

Naravno, jasno je da je $f^+(X_1, \dots, X_n) \subseteq f^+(X_1 \cup Y_1, \dots, X_n \cup Y_n)$, pa koristeći Lemu 2.14 *(d)* dobijamo

$$f^+(X_1, \dots, X_n)/R^{\rightarrow} \subseteq f^+(Y_1, \dots, Y_n)/R^{\rightarrow}.$$

□

Lema 2.16 *Neka je R binarna relacija na A. Tada za sve $X, Y \subseteq A$ važi*

(a) $X/R^{\leftarrow} = \{Z \subseteq A \mid (\forall x \in X)\, Z \cap x/R \neq \emptyset\}$,
(b) $X \subseteq Y \Rightarrow Y/R^{\leftarrow} \subseteq X/R^{\leftarrow}$,
(c) $Z_1 \in X/R^{\leftarrow}\ \&\ Z_1 \subseteq Z_2 \Rightarrow Z_2 \in X/R^{\leftarrow}$,

(d) $(\forall x,y\in A)\ (x/R\subseteq y/R \iff \{x\}/R^{\leftarrow}\subseteq\{y\}/R^{\leftarrow})$,
(e) $(X\cup Y)/R^{\leftarrow}=X/R^{\leftarrow}\cap Y/R^{\leftarrow}$.

Lema 2.17 *Neka je R binarna relacija na skupu A i $X,Y\subseteq A$. Tada je $X/R^{\leftarrow}\subseteq Y/R^{\leftarrow}$ ako i samo ako $(\forall y\in Y)(\exists x\in X)\ x/R\subseteq y/R$.*

Dokaz. Neka za sve $y\in Y$ postoji $x\in X$ takav da je $x/R\subseteq y/R$ i $Z\notin Y/R^{\leftarrow}$. Tada, s obzirom na Lemu 2.16 *(a)*, postoji $y\in Y$ takav da je $Z\cap y/R=\emptyset$. Kako za neko $x\in X$ važi $x/R\subseteq y/R$, znači da je $Z\cap x/R=\emptyset$, pa $Z\notin X/R^{\leftarrow}$.
Obrnuto, pretpostavimo da postoji $y\in Y$ takav da za sve $x\in X$ važi $x/R\not\subseteq y/R$. Tada imamo

$$\bigcup\{x/R\mid x\in X\}\setminus y/R\in X/R^{\leftarrow},$$

$$\bigcup\{x/R\mid x\in X\}\setminus y/R\notin Y/R^{\leftarrow},$$

odakle sledi $X/R^{\leftarrow}\not\subseteq Y/R^{\leftarrow}$.
□

Lema 2.18 *Neka je $\mathcal{A}=\langle A,F\rangle$ algebra i $R\subseteq A^2$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) *R je S-dobra relacija na $\mathcal{A}$;*
(b) *Za sve $f\in F$ i sve $X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n\subseteq A$, gde je $ar(f)=n$, važi*
$(\forall i\leq n)\ X_i/R^{\leftarrow}\subseteq Y_i/R^{\leftarrow}\Rightarrow f^{+}(X_1,\dots,X_n)/R^{\leftarrow}\subseteq f^{+}(Y_1,\dots,Y_n)/R^{\leftarrow}$;
(c) *Za sve $f\in F$ i sve $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n\in A$, gde je $ar(f)=n$, važi*
$(\forall i\leq n)\ x_i/R\subseteq y_i/R\Rightarrow f(x_1,\dots,x_n)/R\subseteq f(y_1,\dots,y_n)/R$.

Dokaz.
(b) ⇒ (a)
Očigledno.
(a) ⇒ (c)
Neka je R S-dobra relacija na $\mathcal{A}$, f n-arna operacija iz F i $x_1/R\subseteq y_1/R,\dots,x_n/R\subseteq y_n/R$. Na osnovu Leme 2.16 *(e)* imamo $\{x_i,y_i\}/R^{\leftarrow}=\{x_i\}/R^{\leftarrow}$, pa je, na osnovu Leme 2.16 *(b)*

$$\{f(y_1,\dots,y_n)\}/R^{\leftarrow}=f^{+}(\{y_1\},\dots,\{y_n\})/R^{\leftarrow}\supseteq$$

$$f^+(\{x_1,y_1\},\ldots,\{x_n,y_n\})/R^{\leftarrow} = f^+(\{x_1\},\ldots,\{x_n\})/R^{\leftarrow} = \{f(x_1,\ldots,x_n)\}/R^{\leftarrow}.$$

Sada, s obzirom na Lemu 2.16 *(d)* sledi

$$f(y_1,\ldots,y_n)/R \supseteq f(x_1,\ldots,x_n)/R.$$

(c) $\to$ *(b)*
Ovo ćemo dokazati primenom Leme 2.17. Neka je $X_i/R^{\leftarrow} \subseteq Y_i/R^{\leftarrow}$ za sve $i \leq n$. Ako $y \in f^+(Y_1,\ldots,Y_n)$, treba dokazati da postoji $x \in f^+(X_1,\ldots,X_n)$ tako da je $x/R \subseteq y/R$. Jasno je da je $y = f(y_1,\ldots,y_n)$ za neke $y_1 \in Y_1,\ldots,y_n \in Y_n$. Na osnovu Leme 2.17, postoje $x_1 \in X_1,\ldots,x_n \in X_n$, takvi da je $x_i/R \subseteq y_i/R$ za sve $i \leq n$. Tada je, s obzirom na *(c)*,

$$x/R = f(x_1,\ldots,x_n)/R \subseteq f(y_1,\ldots,y_n)/R = y/R.$$

□

Definicija 2.9 *Neka je $R \subseteq A^2$. Skup R-***minimalnih elemenata** *skupa A definišemo sa*

$$minA = \{x \in A \mid x/R = \emptyset\}.$$

Lema 2.19 *Neka je $R \subseteq A^2$ i $X \subseteq A$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $X/R^+ = \emptyset$,
(b) $X \cap minA \neq \emptyset$,
(c) $X/R^{\leftarrow} = \emptyset$.

Lema 2.20 *Neka je $R \subseteq A^2$. Tada za sve $X, Y \subseteq A$ važi*

$$X/R^+ = Y/R^+ \Rightarrow X/R^{\leftarrow} = Y/R^{\leftarrow}.$$

Dokaz. Neka je $X/R^+ = Y/R^+$ i $Z \in X/R^{\leftarrow}$. Treba dokazati $Z \in Y/R^{\leftarrow}$. Iz $ZR^{\leftarrow}X$ sledi $(Z \cap X')R^{\leftarrow}X$. S druge strane, $(Z \cap X')R^{\rightarrow}X$, odakle je $(Z \cap X')R^+X$. Iz $X/R^+ = Y/R^+$ zaključujemo $(Z \cap X')R^+Y$ i $(Z \cap X')R^{\leftarrow}Y$. Koristeći Lemu 2.16 *(c)*, dobijamo $ZR^{\leftarrow}Y$. Prema tome, $X/R^{\leftarrow} \subseteq Y/R^{\leftarrow}$. Slično se dokazuje $Y/R^{\leftarrow} \subseteq X/R^{\leftarrow}$.
□

Lema 2.21 *Neka je $R \subseteq A^2$. Tada za sve $X, Y \subseteq A$ važi*

(a) $X/R^+ = \{\emptyset\} \iff X = \emptyset$,
(b) $X/R^{\rightarrow} = \{\emptyset\} \iff X \subseteq minA$,
(c) $X/R^+ = Y/R^+ \neq \emptyset \Rightarrow X' = Y'$,
(d) $X/R^+ = Y/R^+ \neq \emptyset \Rightarrow X/R^{\rightarrow} = Y/R^{\rightarrow}$.

Dokaz.

(a) i *(b)* su očigledni.

(c) Ako je $X/R^+ \neq \emptyset$, tada, na osnovu Leme 2.19 sledi $X' \in X/R^{\leftarrow}$. S druge strane, $X' \in X/R^{\rightarrow}$, pa $X' \in X/R^+$. Kako $X/R^+ = Y/R^+$, imamo $X' \in Y/R^+$. Prema tome, $X'R^{\rightarrow}Y$, i primenjujući Lemu 2.14 *(a)* zaključujemo da je $X' \subseteq Y'$. Slično se dokazuje $Y' \subseteq X'$.

(d) Sledi direktno iz *(c)* i Leme 2.14 *(c)*.

□

Lema 2.22 *Neka je $R \subseteq A^2$ i $X, Y \subseteq A$ takvi da je $X/R = Y/R$ (pri čemu je $X/R = \{x/R \mid x \in X\}$). Tada je $X/R^{\rightarrow} = Y/R^{\rightarrow}$, $X/R^{\leftarrow} = Y/R^{\leftarrow}$ i $X/R^+ = Y/R^+$.*

Dokaz. Sledi iz Lema 2.14 i 2.17 i definicije relacije R^+.
□

Teorema 2.19 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra. Ako je $R \subseteq A^2$ H-dobra relacija na $\mathcal{A}$, tada je R S-dobra relacija na $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$, f n-arna operacija iz F i neka su $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ elementi skupa A takvi da za sve $i \in \{1, \dots, n\}$ važi $x_i/R \subseteq y_i/R$. S obzirom na Lemu 2.18, treba pokazati

$$f(x_1, \dots, x_n)/R \subseteq f(y_1, \dots, y_n)/R.$$

Iz $x_i/R \subseteq y_i/R$ sledi $\{x_i\}/R^{\rightarrow} \subseteq y_i/R^{\rightarrow}$.Kako je R H-dobra, na osnovu Leme 2.15 dobijamo $f^+(\{x_1\},\ldots,\{x_n\})/R^{\rightarrow} \subseteq f^+(\{y_1\},\ldots,\{y_n\})/R^{\rightarrow}$, odnosno,

$$\{f(x_1,\ldots,x_n)\}/R^{\rightarrow} \subseteq \{f(y_1,\ldots,y_n)\}/R^{\rightarrow}.$$

Odavde sledi $\{f(x_1,\ldots,x_n)\}' \subseteq \{f(y_1,\ldots,y_n)\}'$, što znači da je

$$f(x_1,\ldots,x_n)/R \subseteq f(y_1,\ldots,y_n)/R.$$

□

Teorema 2.20 *Neka je $R \subseteq A^2$ H-dobra relacija na algebri $\mathcal{A}$. Tada je R vrlo dobra relacija $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$, f n-arna operacija iz F i neka su $X_1,\ldots,X_n$,$Y_1,\ldots,Y_n$ podskupovi od A takvi da za sve $i \in \{1,\ldots,n\}$ važi $X_i/R^+ = Y_i/R^+$. Treba dokazati

$$f^+(X_1,\ldots,X_n)/R^+ = f^+(Y_1,\ldots,Y_n)/R^+.$$

Postoje tri slučaja.
Slučaj 1. $X_i/R^+ \neq \emptyset$ for all $i \in \{1,\ldots,n\}$.
Na osnovu Leme 2.21 *(d)*, imamo $X_i/R^{\rightarrow} = Y_i/R^{\rightarrow}$, i s obzirom da je R H-dobra zaključujemo

$$f^+(X_1,\ldots,X_n)/R^{\rightarrow} = f^+(Y_1,\ldots,Y_n)/R^{\rightarrow}.$$

Dalje, koristeći Lemu 2.20 dobijamo $X_i/R^{\leftarrow} = Y_i/R^{\leftarrow}$, i sada, na osnovu Teoreme 2.19 sledi $f^+(X_1,\ldots,X_n)/R^{\leftarrow} = f^+(Y_1,\ldots,Y_n)/R^{\leftarrow}$. Prema tome,

$$f^+(X_1,\ldots,X_n)/R^+ = f^+(Y_1,\ldots,Y_n)/R^+.$$

Slučaj 2. $(\exists k)\ X_k/R^+ = \emptyset$ i $(\exists m)\ X_m = \emptyset$.
ako je $X_m = \emptyset$ tada takodje $Y_m = \emptyset$ (na osnovu Leme 2.21 *(a)*). Dakle

$$f^+(X_1,\ldots,X_n)/R^+ = \emptyset/R^+ = f^+(Y_1,\ldots,Y_n)/R^+.$$

Slučaj 3. $(\exists k)\ X_k/R^+ = \emptyset$ i $(\forall m)\ X_m \neq \emptyset$.
Neka je $X_k/R^+ = \emptyset$. S obzirom na Lemu 2.19, postoji R-minimalni element $a \in X_k$ i $X_k/R^{\leftarrow} = \emptyset = \{a\}/R^{\leftarrow}$. Kako je R S-dobra, zaključujemo

$$f^+(X_1,\ldots,X_n)/R^{\leftarrow} = f^+(X_1,\ldots,\{a\},\ldots,X_n)/R^{\leftarrow}. \tag{2.9}$$

S druge strane, $\{a\}/R^{\rightarrow} = \{\emptyset\} = \emptyset/R^{\rightarrow}$, i s obzirom da je R H-dobra relacija, imamo

$$f^+(X_1,\dots,\{a\},\dots,X_n)/R^{\rightarrow} = f^+(X_1,\dots,\emptyset,\dots,X_n)/R^{\rightarrow} = \emptyset/R^{\rightarrow} = \{\emptyset\}.$$

na osnovu Leme 2.21 *(b)*, odatle sledi $f^+(X_1,\dots,\{a\},\dots,X_n) \subseteq minA$. Kako je $X_m \neq \emptyset$ za sve $m \in \{1,\dots,n\}$, imamo $f^+(X_1,\dots,\{a\},\dots,X_n) \neq \emptyset$, odakle, primenjujući Lemu 2.19, zaključujemo $f^+(X_1,\dots,\{a\},\dots,X_n)/R^{\leftarrow} = \emptyset$. S obzirom na (2.9), dalje sledi $f^+(X_1,\dots,X_n)/R^{\leftarrow} = \emptyset$, pa je, prema tome, $f^+(X_1,\dots,X_n)/R^+ = \emptyset$. Slično tome se pokazuje $f^+(Y_1,\dots,Y_n)/R^+ = \emptyset$, što znači da je

$$f^+(X_1,\dots,X_n)/R^+ = f^+(Y_1,\dots,Y_n)/R^+.$$

□

Dve prethodne teoreme u potpunosti opisuju veze koje postoje izmedju H-dobrih, S-dobrih i vrlo dobrih relacija. To ćemo ilustrovati sa sledeća tri tvrdjenja.

Teorema 2.21 *Neka je $\mathcal{F}$ netrivijalni tip algebri i $\lambda \geq 2$ proizvoljan kardinal. Tada postoji algebra $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{F}$ sa λ elemenata i relacija $R \subseteq A^2$ koja je vrlo dobra na $\mathcal{A}$, ali nije S-dobra na $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A}$ skup, $|A| \geq 2$ i neka su $a,b \in A$ dva različita elementa. Izaberimo operacijski simbol $f \in F$, $ar(f) = n \geq 1$, i definišimo $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ na sledeći način:

$$f^{\mathcal{A}}(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} b & \text{ako } x_i = a \text{ za sve } \ i \\ a & \text{inače} \end{cases}$$

U nastavku, da bismo poboljšali preglednost teksta, koristićemo oznaku f umesto $f^{\mathcal{A}}$.

Sve ostale fundamentalne operacije algebre $\mathcal{A}$ definisaćemo tako da budu esencijalno nularne. Relaciju $R \subseteq A^2$ definišemo sa

$$R = \{(a,b),(b,a)\} \cup \{(x,x) : x \in A \setminus \{b\}\}.$$

- R nije S-dobra zato što $\{b\}/R^{\leftarrow} = \{a,b\}/R^{\leftarrow}$, ali

$$f^{+}(\{b\},\ldots,\{b\})/R^{\leftarrow} = \{a\}/R^{\leftarrow} \ni \{b\},$$

$$f^{+}(\{a,b\},\ldots,\{a,b\})/R^{\leftarrow} = \{a,b\}/R^{\leftarrow} \not\ni \{b\}.$$

- R je vrlo dobra zato što $\varepsilon(R^{+}) = \Delta_A$.

□

Teorema 2.22 *Neka je $\mathcal{F}$ netrivijalni tip algebri i $\lambda \geq 3$ proizvoljan kardinal. Tada postoji algebra $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{F}$ sa λ elemenata i relacija $R \subseteq A^2$ koja je S-dobra na $\mathcal{A}$, ali nije vrlo dobra na $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Neka je A skup, $|A| \geq 3$ i $a,b,c \in A$ tri različita elementa. Neka je $f \in F$ operacijski simbol arnosti $n \geq 1$. Definišimo $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$ sa

$$f^{\mathcal{A}}(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} c & \text{ako } x_i = c \text{ za sve } \; i \\ b & \text{inače} \end{cases}$$

U nastavku, pisaćemo f umesto $f^{\mathcal{A}}$. Sve ostale fundamentalne operacije algebre $\mathcal{A}$ definišemo kao esencijalno nularne. Relaciju $R \subseteq A^2$ definišemo sa

$$R = \{(a,b),(b,c),(a,c)\}.$$

- Najpre ćemo dokazati da je R S-dobra relacija. Neka su $X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n$ podskupovi od A takvi da za sve $i \in \{1,\ldots,n\}$ važi $X_i/R^{\leftarrow} = Y_i/R^{\leftarrow}$. Ako $X_j = \emptyset$ za neko j, tada $Y_j = \emptyset$, pa imamo

  $$f^{+}(X_1,\ldots,X_n)/R^{\leftarrow} = f^{+}(Y_1,\ldots,Y_n)/R^{\leftarrow} = \emptyset/R^{\leftarrow}.$$

  Ako $f^{+}(X_1,\ldots,X_n) = \{c\}$, tada $X_1 = \ldots = X_n = \{c\}$, odakle sledi $Y_1 = \ldots = Y_n = \{c\}$ i $f^{+}(x_1,\ldots,x_n)/R^{\leftarrow} = f^{+}(y_1,\ldots,y_n)/R^{\leftarrow}$.

Ako $f^+(X_1,\ldots,X_n)=\{b\}$ ili $f^+(X_1,\ldots,X_n)=\{b,c\}$ tada $f^+(Y_1,\ldots,Y_n)=\{b\}$ ili $f^+(Y_1,\ldots,Y_n)=\{b,c\}$. Kako je $\{b\}/R^{\leftarrow}=\{b,c\}/R^{\leftarrow}$, sledi da je

$$f^+(X_1,\ldots,X_n)/R^{\leftarrow}=f^+(Y_1,\ldots,Y_n)/R^{\leftarrow}.$$

- $R\notin G^+(\mathcal{A})$ zato što $\{a,b\}/R^+=\{a,c\}/R^+=\emptyset$, ali

$$f^+(\{a,b\},\ldots,\{a,b\})/R^+=\{b\}/R^+\not\ni\{a,b\},$$

$$f^+(\{a,c\},\ldots,\{a,c\})/R^+=\{b,c\}/R^+\ni\{a,b\}.$$

□

Teorema 2.23 *Neka je $\mathcal{F}$ netrivijalni tip algebri i $\lambda\geq 3$ proizvoljan kardinal. Tada postoji algebra $\mathcal{A}$ tipa $\mathcal{F}$ sa λ elemenata i relacija $R\subseteq A^2$ koja je vrlo dobra i S-dobra na $\mathcal{A}$, ali nije H-dobra na $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Neka su $a,b,c\in A$ tri različita elementa. Definišimo relaciju $R\subseteq A^2$ sa

$$R=\{(a,b),(b,a),(c,b),(b,c)\}\cup\{(x,x):x\in A\setminus\{b\}\}.$$

Uzmimo $f\in F$ takav da $ar(f)=n\geq 1$. Sada definišimo $f^{\mathcal{A}}:A^n\to A$ na sledeći način:

$$f^{\mathcal{A}}(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases} b & \text{ako } x_i=b \text{ za sve } i\\ a & \text{inače}\end{cases}$$

U nastavku, pisaćemo f umesto $f^{\mathcal{A}}$.

Ostale fundamentalne operacije algebre $\mathcal{A}$ neka budu konstantne operacije.

- $R\notin G^{\rightarrow}(\mathcal{A})$ jer $\{a,b\}/R^{\rightarrow}=\{a,c\}/R^{\rightarrow}$, ali

$$f^+(\{a,b\},\ldots,\{a,b\})/R^{\rightarrow}=\{a,b\}/R^{\rightarrow}\ni\{c\},$$

$$f^+(\{a,c\},\ldots,\{a,c\})/R^{\rightarrow}=\{a\}/R^{\rightarrow}\not\ni\{c\}.$$

- $R \in G^{\leftarrow}(\mathcal{A})$ jer $\varepsilon(R^{\leftarrow}) = \Delta_A$.
- $R \in G^{+}(\mathcal{A})$ jer $\varepsilon(R^{+}) = \Delta_A$.

□

Sada sledi napred pomenuto tvrdjenje o kvazi-uredjenjima.

Posledica 2.10 *Neka je $\mathcal{A}$ algebra i $R \subseteq A^2$ kvazi-uredjenje na A. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) R je kompatibilna na $\mathcal{A}$.
(b) R je H-dobra na $\mathcal{A}$.
(c) R je S-dobra na $\mathcal{A}$.

Dokaz. (a) $\Rightarrow$ (b)
Let $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$, $f \in F$, $ar(f) = n \geq 1$ i $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n \subseteq A$. Pretpostavimo da $X_i/R^{\rightarrow} = Y_i/R^{\rightarrow}$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Treba dokazati

$$f^{+}(X_1, \ldots, X_n)/R^{\rightarrow} = f^{+}(Y_1, \ldots, Y_n)/R^{\rightarrow}.$$

Neka $ZR^{\rightarrow} f^{+}(X_1, \ldots, X_n)$ i $z \in Z$. Tada

$$(\exists x_1 \in X_1) \ldots (\exists x_n \in X_n)\ zRf(x_1, \ldots, x_n).$$

Iz $\{x_i\}R^{\rightarrow}X_i$ i $X_i/R^{\rightarrow} = Y_i/R^{\rightarrow}$ zaključujemo $\{x_i\}R^{\rightarrow}Y_i$. Prema tome, postoje $y_1 \in Y_1, \ldots, y_n \in Y_n$ takvi da x_iRy_i za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Kako je R kompatibilna na $\mathcal{A}$, odatle sledi $f(x_1, \ldots, x_n)Rf(y_1, \ldots, y_n)$. Iz $zRf(x_1, \ldots, x_n)$ i tranzitivnosti relacije R dobijamo $zRf(y_1, \ldots, y_n)$. To znači da je $ZR^{\rightarrow} f^{+}(Y_1, \ldots, Y_n)$,odakle zaključujemo da je da je $f^{+}(X_1, \ldots, X_n)/R^{\rightarrow} \subseteq f^{+}(Y_1, \ldots, Y_n)/R^{\rightarrow}$. Obrnuta inkluzija dokazuje se analogno.
(b) $\Rightarrow$ (c)
Sledi iz Teoreme 2.19.
(c) $\Rightarrow$ (a)
Neka $f \in F$, $ar(f) = n \geq 1$, i $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ su elementi skupa A takvi da je x_iRy_i za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$. Kako je R tranzitivna relacija važi $zRx_i \Rightarrow zRy_i$, pa je $x_i/R \subseteq y_i/R$. Na osnovu Leme 2.18 dobijamo $f(x_1, \ldots, x_n)/R \subseteq f(y_1, \ldots, y_n)/R$, odakle, zbog refleksivnosti relacije R sledi $f(x_1, \ldots, x_n)Rf(y_1, \ldots, y_n)$.
□

Postoje kvazi-uredjenja koja su vrlo dobra na nekoj algebri ali ne i kompatibilna.

Primer 2.21 *Neka je $A = \{0, 1, \ldots, n\}$, $(n \geq 1)$ i neka je $\leq$ uobičajeni poredak na A. Definišimo $f : A \to A$ sa:*

$$f(i) = n - i, \quad i \in A.$$

Tada $\leq$ nije kompatibilna relacija na $\mathcal{A} = \langle A, f \rangle$ jer važi $0 \leq 1$ ali ne i $f(0) \leq f(1)$. S druge strane, $\leq$ je vrlo dobra na $\mathcal{A}$. Naime, ako sa $m(Z)$ označimo najmanji, a sa $M(Z)$ najveći element skupa Z, tada imamo:

$$X/\leq^+ = Y/\leq^+ \Rightarrow m(X) = m(Y) \;\&\; M(X) = M(Y) \Rightarrow$$

$$M(f^+(X)) = M(f^+(Y)) \;\&\; m(f^+(X)) = m(f^+(Y)) \Rightarrow$$

$$f^+(X)/\leq^+ = f^+(Y)/\leq^+ .$$

Relacije koje čuvaju strukturu algebre su H-dobre, S-dobre i vrlo dobre.

Teorema 2.24 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ algebra i R relacija koja čuva strukturu algebre $\mathcal{A}$. Tada $R \in G^{\rightarrow}(\mathcal{A})$.*

Dokaz. S obzirom na Leme 2.14 i 2.15, treba pokazati sledeće: ako je f n-arna operacija iz F i $X_1' \subseteq Y_1', \ldots, X_n' \subseteq Y_n'$, tada je $(f^+(X_1, \ldots, X_n))' \subseteq (f^+(Y_1, \ldots, Y_n))'$. Dakle, neka je $X_i' \subseteq Y_i'$ za $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $zRf(x_1, \ldots, x_n)$ za neke $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$. Pošto R čuva argumente operacije f, postoje $z_1, \ldots, z_n \in A$ takvi da je z_iRx_i za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $z = f(z_1, \ldots, z_n)$. Iz z_iRx_i i $X_i' \subseteq Y_i'$ sledi da postoje $y_i \in Y_i$ takvi da je z_iRy_i. Sada na osnovu kompatibilnosti relacije R zaključujemo da je $f(z_1, \ldots, z_n)Rf(y_1, \ldots, y_n)$, odnosno, $zRf(y_1, \ldots, y_n)$.
□

Teorema 2.25 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ algebra i R relacija koja čuva strukturu algebre $\mathcal{A}$. Tada $R \in G^{\leftarrow}(\mathcal{A})$ i $R \in G^{+}(\mathcal{A})$.*

Dokaz. Sledi iz Teorema 2.24,2.19 i 2.20.
□

Definicija 2.10 *Neka je $R \subseteq A^2$. Za sve $\mathcal{X} \in \mathcal{P}(A/R)$ definišemo:*

$$pre(\mathcal{X}) = \{a \in A \mid a/R \in \mathcal{X}\}.$$

Sledeća teorema daje uopštene verzije Teoreme 2.2.

Teorema 2.26 *Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ algebra i $R \subseteq A^2$. Tada važi*

(a) Ako $R \in G^{\rightarrow}(\mathcal{A})$ onda je $\mathcal{P}(\mathcal{A})/R^{\rightarrow}$ homomorfna slika od $\mathcal{P}(\mathcal{A}/R)$.
(b) Ako $R \in G^{\leftarrow}(\mathcal{A})$ onda je $\mathcal{P}(\mathcal{A})/R^{\leftarrow}$ homomorfna slika od $\mathcal{P}(\mathcal{A}/R)$.
(c) Ako $R \in G^{+}(\mathcal{A})$ onda je $\mathcal{P}(\mathcal{A})/R^{+}$ homomorfna slika od $\mathcal{P}(\mathcal{A}/R)$.

Dokaz. Dokazaćemo samo tvrdjenje *(c)*, jer su dokazi ostala dva tvrdjenja slični. Definišimo preslikavanje $\nu : \mathcal{P}(\mathcal{A}/R) \to \mathcal{P}(\mathcal{A})/R^{+}$ sa: $\nu(\mathcal{X}) = pre(\mathcal{X})/R^{+}$. Najpre ćemo dokazati da je ν homomorfizam. Ako je f n-arna operacija iz F imamo

$$\nu({}^{\lceil}f^{\rceil^{+}}(\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n)) = \nu(\{{}^{\lceil}f^{\rceil}(x_1/R, \ldots, x_n/R) \mid x_i/R \in \mathcal{X}_i\}) =$$

$$\nu(\{f(x_1, \ldots, x_n)/R \mid x_i/R \in \mathcal{X}_i\}) =$$

$$\{a \in A \mid a/R = f(x_1, \ldots, x_n)/R \text{ za neke } x_i/R \in \mathcal{X}_i\}/R^{+}.$$

S druge strane

$${}^{\lceil}f^{+\rceil}(\nu(\mathcal{X}_1), \ldots, \nu(\mathcal{X}_n)) = {}^{\lceil}f^{+\rceil}(pre(\mathcal{X}_1)/R^{+}, \ldots, pre(\mathcal{X}_n)/R^{+}) =$$

$$f^{+}(pre(\mathcal{X}_1), \ldots, pre(\mathcal{X}_n))/R^{+} = \{f(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i/R \in \mathcal{X}_i\}/R^{+}.$$

Dve R^{+}-klase koje smo dobili su jednake, na osnovu Leme 2.22.

Treba još dokazati da je ν surjektivno preslikavanje. Proizvoljni element iz $\mathcal{P}(\mathcal{A})/R^{+}$ je oblika X/R^{+} gde je $X \subseteq A$. Posmatrajmo $pre(X/R)$. Kako je $pre(X/R)\big/R = X/R$, na osnovu Leme 2.22 dobijamo $pre(X/R)\big/R^{+} = X/R^{+}$, odnosno, $\nu(X/R) = X/R^{+}$.

□

2.7 Stepenovanje vrlo dobrih, H-dobrih i S-dobrih relacija

Kao što je već ranije pomenuto, ako je R dobra relacija na $\mathcal{A}$, tada R^+, $R^\rightarrow$ i $R^\leftarrow$ ne moraju biti dobre relacije na odgovarajućoj algebri kompleksa. Prirodno je postaviti pitanje šta se dešava sa stepenim relacijama vrlo dobrih, H-dobrih i S-dobrih relacija.

Lema 2.23 *Neka je R vrlo dobra relacija na $\mathcal{A}$. Tada*

(a) $R^\rightarrow$ ne mora biti dobra relacija na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$;
(b) $R^\leftarrow$ ne mora biti dobra relacija na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.

Dokaz. (a) Pretpostavimo da je za svaku algebru $\mathcal{A}$ i za svaku vrlo dobru relaciju R na $\mathcal{A}$, $R^\rightarrow$ takodje vrlo dobra. Tada $R^\rightarrow$ mora biti dobra na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Medjutim, to je u kontradikciji sa Teoremama 2.19 i 2.21.
(b) Pretpostavimo da je za svaku algebru $\mathcal{A}$ i svaku vrlo dobru relaciju R na $\mathcal{A}$, $R^\leftarrow$ takodje vrlo dobra. Tada $R^\leftarrow$ mora biti dobra na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Medjutim, to je u kontradikciji sa Teoremom 2.21.
□

Primer 2.22 *Neka je $A = \{a,b,c\}$, $R = \{(a,a),(a,b),(b,b),(a,c),(c,c)\}$ i $f(a) = c$, $f(b) = a$, $f(c) = b$. Tada je R vrlo dobra na $\mathcal{A} = \langle A, f\rangle$ (jer je $\varepsilon(R^+) = \Delta_{\mathcal{P}(A)}$), ali R^+ nije vrlo dobra na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Naime, važi*

$$\{\{a\},\{c\},\{a,c\}\}/(R^+)^+ = \{\{a\},\{c\}\}/(R^+)^+,$$

ali je

$$(f^+)^+(\{\{a\},\{c\},\{a,c\}\})/(R^+)^+ = \{\{b\},\{c\},\{b,c\}\}/(R^+)^+ \neq \\ \{\{b\},\{c\}\}/(R^+)^+ = (f^+)^+(\{\{a\},\{c\}\})/(R^+)^+.$$

Posledica 2.11 *Neka je R vrlo dobra relacija na $\mathcal{A}$. Tada R^+ ne mora biti vrlo dobra na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.*

Dokaz. Sledi iz prethodnog primera.
□

Lema 2.24 *Neka je R S-dobra relacija na $\mathcal{A}$. Tada*

(a) R^+ *ne mora biti S-dobra na* $\mathcal{P}(\mathcal{A})$;

(b) $R^{\rightarrow}$ *ne mora biti S-dobra na* $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.

Dokaz. (a) Pretpostavimo da je za svaku algebru $\mathcal{A}$ i za svaku S-dobru relaciju R na $\mathcal{A}$, R^+ takodje S-dobra. Tada R^+ mora biti dobra na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Medjutim, to je u kontradikciji sa Teoremom 2.22.
(b) Pretpostavimo da je za svaku algebru $\mathcal{A}$ i za svaku S-dobru relaciju R na $\mathcal{A}$, $R^{\rightarrow}$ takodje S-dobra. Tada $R^{\rightarrow}$ mora biti dobra na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. Medjutim, to je u kontradikciji sa Teoremama 2.22 i 2.20.
□

Ipak, za S-dobre i H-dobre relacije, nisu svi odgovori negativni.

Teorema 2.27 *Neka je R S-dobra relacija na $\mathcal{A}$. Tada je $R^{\leftarrow}$ S-dobra relacija na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ algebra, $f \in F$, $ar(f) = n \geq 1$ i $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ su podskupovi skupa A takvi da je $X_i/R^{\leftarrow} \subseteq Y_i/R^{\leftarrow}$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Na osnovu Leme 2.18 *(b)*, zaključujemo da je

$$f^+(X_1, \dots, X_n)/R^{\leftarrow} \subseteq f^+(Y_1, \dots, Y_n)/R^{\leftarrow}.$$

Medjutim, sada iz Leme 2.18 *(c)* direktno sledi da je $R^{\leftarrow}$ S-dobra relacija na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.
□

Teorema 2.28 *Neka je R H-dobra relacija na $\mathcal{A}$. Onda je $R^{\rightarrow}$ H-dobra relacija na $\mathcal{P}(\mathcal{A})$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} = \langle A, F\rangle$ algebra, $f \in F$, $ar(f) = n \geq 1$, i $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ su podskupovi skupa $\mathcal{P}(A)$, takvi da je $\alpha_i/(R^{\rightarrow})^{\rightarrow} = \beta_i/(R^{\rightarrow})^{\rightarrow}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ Treba dokazati da je

$$(f^+)^+(\alpha_1, \dots, \alpha_n)/(R^{\rightarrow})^{\rightarrow} = (f^+)^+(\beta_1, \dots, \beta_n)/(R^{\rightarrow})^{\rightarrow}.$$

Neka $\gamma \in (f^+)^+(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)/(R^{\to})^{\to}$ i $X \in \gamma$. Onda postoje $X_1 \in \alpha_1,\ldots,X_n \in \alpha_n$ takvi da je $X\ R^{\to}\ f^+(X_1,\ldots,X_n)$. Sada imamo

$$X_i'\ R^{\to}\ X_i \Rightarrow \{X_i'\} \in \alpha_i/(R^{\to})^{\to} \Rightarrow$$

$$\{X_i'\} \in \beta_i/(R^{\to})^{\to} \Rightarrow (\exists Y_i \in \beta_i)\ X_i'\ R^{\to}\ Y_i \Rightarrow$$

$$(\exists Y_i \in \beta_i)\ X_i' \subseteq Y_i' \Rightarrow (\exists Y_i \in \beta_i)\ X_i/R^{\to} \subseteq Y_i/R^{\to}.$$

Kako ovo važi za proizvoljno $i \in \{1,\ldots,n\}$, koristeći Lemu 2.15 dobijamo:

$$X_i/R^{\to} \subseteq Y_i/R^{\to} \Rightarrow f^+(X_1,\ldots,X_n)/R^{\to} \subseteq f^+(Y_1,\ldots,Y_n)/R^{\to} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X\ R^{\to}\ f^+(Y_1,\ldots,Y_n) \Rightarrow \gamma \in (f^+)^+(\beta_1,\ldots,\beta_n)/(R^{\to})^{\to}.$$

□

Poglavlje 3

Grafovi i stepene konstrukcije

3.1 Osnovni pojmovi i oznake

Neka je V neprazan skup. **Graf** G sa skupom čvorova V je uredjen par (V,E), gde je E binarna relacija na V. Elemente skupa E zovemo granama grafa G. Grana oblika (u,u) je **petlja**. Ako je relacija E simetrična, graf $G = (V,E)$ je **neorijentisan graf**, a ako je E antisimetrična relacija onda je G **orijentisan graf**. Graf bez petlji je **prost graf**. Graf kod koga svaki čvor ima petlju (tj. kod koga je odgovarajuća relacija refleksivna) nazivamo **refleksivnim grafom** . U ovom poglavlju razmatramo uglavnom konačne grafove.

U daljem tekstu upotrebljavamo sledeće oznake: $x \to y$ znači da postoji grana iz x u y, tj. $(x,y) \in E$ (tada kažemo da x "tuče" y). Sa $x \leftrightarrow y$ označavamo da x tuče y i y tuče x. Sa $x \leftarrow y$ označavamo da je x tučen od y. **Izlaznim skupom** čvora v u grafu $G = (V,E)$ zovemo skup $O(v) = \{x \in V \mid v \to x\}$. Analogno se definiše **ulazni skup** $I(v)$. U neorijentisanom grafu skup suseda čvora v (tj. skup svih čvorova y takvih da $(v,y) \in E$) označavamo sa $N(v)$.

Izlazni stepen čvora v **u grafu** G, u oznaci $d_G^+(v)$, je $|O(v)|$. Analogno, **ulazni stepen čvora** v **u grafu** G, u oznaci $d_G^-(v)$, je $|I(v)|$. Kada god je iz konteksta jasno o kom grafu se radi, pisaćemo samo $d^+(v)$ ($d^-(v)$). Tako, nećemo praviti razliku izmedju oznaka za stepen čvora u grafu i njegovom stepenom grafu. U neorijentisanom grafu definišemo **stepen čvora** v sa $d_G(v) = |N(v)|$.

Podgraf grafa $G = (V,E)$ je svaki graf $G_1 = (V_1,E_1)$ takav da važi $V_1 \subseteq V$ i $E_1 \subseteq E$. Ako je pritom $E_1 = E \cap V_1^2$, tada kažemo da je G_1 **podgraf grafa** G **indukovan skupom čvorova** V_1, ili skraćeno, **indukovan podgraf grafa** G. Taj graf označavamo sa G_{V_1}.

Put dužine n u grafu G je niz (ne obavezno različitih) čvorova $v_0v_1 \dots v_{n-1}v_n$ takav da $v_i \to v_{i+1}$ za sve $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Neorijentisan graf G je **povezan** ako za svaka dva čvora u,v postoji put sa početnim čvorom u i krajnjim čvorom v. **Komponenta povezanosti grafa** G je maksimalan povezan podgraf grafa G. Jasno je da je graf povezan ako i samo ako ima tačno jednu komponentu povezanosti. **Lanac** dužine n je graf $G = (V,E)$ gde je $V = \{v_0,v_1,\dots,v_n\}$, a $E = \{(v_0,v_1),(v_1,v_2),\dots,(v_{n-1},v_n)\} \cup \{(v_1,v_0),(v_2,v_1),\dots,(v_n,v_{n-1})\}$. **Kontura** dužine $n+1$ je graf $G = (V,E)$ gde je $V = \{v_0,v_1,\dots,v_n\}$, a
$E = \{(v_0,v_1),(v_1,v_2),\dots,(v_{n-1},v_n)\} \cup \{(v_1,v_0),(v_2,v_1),\dots,(v_n,v_{n-1})\} \cup \{(v_n,v_0),(v_0,v_n)\}$.

Kompletan graf je graf $G = (V,E)$ gde je $E = A^2 \setminus \Delta_A$. Takav graf označavamo sa K_V, ili sa K_n, gde je $n = |V|$. **Bipartitan graf** je neorijentisan graf $G = (V,E)$ takav da se skup V može razbiti na dva podskupa V_1 i V_2 tako da su skupovi grana grafova G_{V_1} i G_{V_2} prazni. Ako pritom za sve $x \in V_1$ i za sve $y \in V_2$ važi $(x,y) \in E$ i $(y,x) \in E$, tada je G **kompletan bipartitan graf**, koga označavamo sa K_{V_1,V_2}, ili $K_{m,n}$, gde je $m = |V_1|$, $n = |V_2|$.

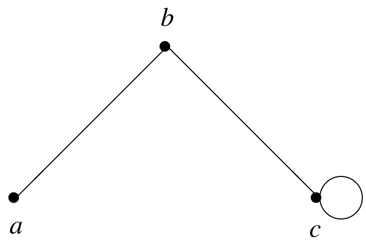
3.2 Stepeni grafovi

Pošto graf posmatramo kao relacijsku strukturu, i definicija stepenog grafa slaže se sa opštom definicijom stepene relacije (Definicija 1.28).

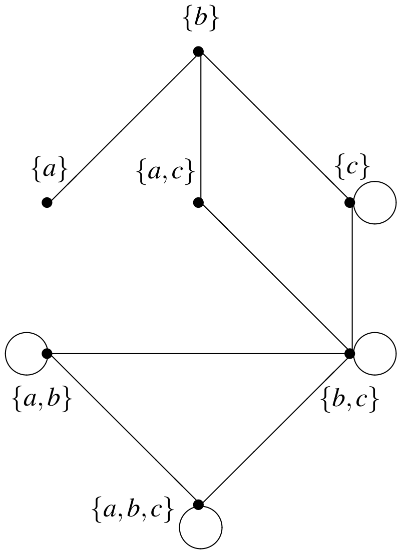
Definicija 3.1 *([1]) Neka je $G = (V,E)$ graf.* **Stepeni graf** *grafa G je graf $\mathcal{P}(G) = (\mathcal{P}_+(V),E^+)$, gde je $\mathcal{P}_+(V) = \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$, a*

$$E^+ = \{(X,Y) \mid (\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ (x,y) \in E \ \wedge\ (\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ (x,y) \in E\}.$$

Primer 3.1 *Na slikama 3.1 i 3.2 prikazani su graf $G = (V,E)$, gde je $V = \{a,b,c\}$, $E = \{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(c,c)\}$ i njegov stepeni graf.*



Slika 3.1: Graf G



Slika 3.2: Graf $\mathcal{P}(G)$

Stepene grafove razmatraju U. Baumann, R. Pöschel i I. Schmeichel u radu [1]. Sledeće tvrdjenje odnosi se na neke osnovne osobine stepenih grafova.

Lema 3.1 *([1]) Neka je $G = (V, E)$ konačan graf i $v \in V$. Tada*

(a) $\mathcal{P}(G)$ ima indukovan podgraf izomorfan sa G;

(b) $\mathcal{P}(G)$ je neorijentisan graf ako i samo ako je G neorijentisan graf;

(c) $d^{\pm}(\{v\}) = 2^{d^{\pm}(v)} - 1$;

(d) ako je G neorijentisan graf, onda je $\mathcal{P}(G)$ povezan graf ako i samo ako je G povezan graf koji nije bipartitan.

Dokaz. (a) To je podgraf indukovan jednoelementnim podskupovima skupa čvorova grafa G.
(b) Sledi iz *(a)* i činjenice da se simetričnost relacija prenosi stepenom konstrukcijom.
(c) Čvor $\{v\}$ u grafu $\mathcal{P}(G)$ tuče sve neprazne podskupove skupa $O(v)$.

(d) Ako je G nepovezan graf sa komponentama povezanosti X i Y, onda u $\mathcal{P}(G)$ postoje bar tri komponente. Naime, posmatrajmo skupove $\mathcal{P}_+(X)$, $\mathcal{P}_+(Y)$ i $\mathcal{P}_+(V) \setminus (\mathcal{P}_+(X) \cup \mathcal{P}_+(Y))$. Lako je videti da ne postoji grana koja spaja dva čvora iz neka dva od ovih skupova.
Ako je G bipartitan graf sa klasama biparticije X i Y, tada ne postoji grana koja bi spajala čvor iz $\mathcal{P}_+(X) \cup \mathcal{P}_+(Y)$ sa čvorom iz $\mathcal{P}_+(V) \setminus (\mathcal{P}_+(X) \cup \mathcal{P}_+(Y))$.
Obrnuto, neka je G povezan graf koji nije bipartitan. Da bismo pokazali da je $\mathcal{P}(G)$ povezan, dovoljno je dokazati da za sve $v_0 \in V$ i svako $U = \{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq V$ postoji put u $\mathcal{P}(G)$ od $\{v_0\}$ do U. Pošto G nije bipartitan (pa ima konturu neparne dužine), za svako $u_i \in U$ postoji put neparne dužine iz v_0 do u_i. Dalje, svaki put neparne dužine s može se produžiti do bilo koje neparne dužine $m > s$ (pomoću puta $v_0 v_1 v_0$, gde je v_1 neki sused čvora v_0). Prema tome, za sve $i \in \{1, \ldots, k\}$ postoje putevi iste, neparne dužine iz v_0 u u_i: $v_0 v_{1i} v_{2i} \ldots v_{ri} u_i$. No, onda je $\{v_0\} V_1 V_2 \ldots V_r U$, gde je $V_j = \{v_{ji} \mid i \in \{1, \ldots, k\}\}$, put iz $\{v_0\}$ u U.
□

Za proizvoljni čvor stepenog grafa možemo dati sledeću procenu izlaznog (ulaznog) stepena.

Lema 3.2 *Neka je $G = (V, E)$ konačan graf i $X = \{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq V$. Tada u grafu $\mathcal{P}(G)$ važi:*

$$d^{\pm}(X) \geq \min_{x_i \in X} d^{\pm}(\{x_i\}).$$

Dokaz. U dokazu koristimo indukciju po r. Za $r = 1$ tvrdjenje očigledno važi. Neka je $r > 1$. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za sve skupove sa manje od r elemenata. Ako je $d^+(x_s) = \min_{x_i \in X} d^+(x_i)$, neka je $Y = X \setminus \{x_s\}$. Po induktivnoj pretpostavci važi $d^+(Y) \geq \min_{x_i \in Y} d^+(\{x_i\}) \geq d^+(\{x_s\})$. Ako X tuče sve čvorove stepenog grafa koje tuče Y, tada je $d^+(X) \geq d^+(Y) \geq d^+(\{x_s\})$. U suprotnom, za neko $Z \subseteq V$ važi $Y \to Z$ i $X \not\to Z$. Neka je $S = O(x_s)$. Tada je $Z \cap S = \emptyset$ i X tuče sve čvorove $Z \cup P$, gde je P neprazan podskup skupa S. No, odatle je $d^+(X) \geq 2^{|S|} - 1 = d^+(\{x_s\})$.
□

U radu [1] autori razmatraju automorfizme grafova i njihovih stepenih grafova. Kako se time nećemo baviti u nastavku ovog poglavlja, ovde ćemo samo navesti neke rezultate bez dokaza. Pre svega, uvodimo sledeće oznake. Za proizvoljan skup V definišemo $H_V = \{\alpha \mid \alpha : V \to V\}$ i $S_V = \{\alpha \in H_V \mid \alpha \text{ je bijekcija }\}$. Ako je $H \subseteq H_V$ onda je $H^+ = \{\alpha^+ \mid \alpha \in H\}$.

Teorema 3.1 *Neka je $G = (V,E)$ graf i $\alpha \in S_V$. Tada*

(a) $\alpha \in AutG$ *ako i samo ako* $\alpha^+ \in Aut\mathcal{P}(G)$.
(b) $(AutG)^+ = Aut\mathcal{P}(G) \cap S_V^+$.

Teorema 3.2 *Neka je $G = (V,E)$ graf i $|V| \geq 2$. Tada je $Aut\mathcal{P}(G) = S_V^+$ ako i samo ako je $G = K_V$.*

Teorema 3.3 *Neka je $G = (V,E)$ graf i $\alpha \in H_V$. Tada*

(a) $\alpha \in EndG$ *ako i samo ako* $\alpha^+ \in End\mathcal{P}(G)$.
(b) $(EndG)^+ = End\mathcal{P}(G) \cap H_V^+$.

U poslednje vreme stepeni grafovi nalaze primenu u teorijskom računarstvu. Tako, W. Korczyński u radovima [28] i [29] razmatra stepene grafove kao modele konkurentnih sistema i poredi ih sa nekim do sada izučavanim modelima.

3.3 Globalna odredjenost grafova

Za dva izomorfna grafa, lako je pokazati da su njihovi stepeni grafovi izomorfni. Naime, ako je α izomorfizam grafova G_1 i G_2, tada je α^+ izomorfizam grafova $\mathcal{P}(G_1)$ i $\mathcal{P}(G_2)$. Kao i kod univerzalnih algebri, možemo postaviti pitanje da li važi i obrnuta implikacija.

Definicija 3.2 *Za klasu grafova $\mathcal{C}$ kažemo da je* **globalno odredjena** *ako za sve G_1,G_2 iz $\mathcal{C}$ važi:*

$$\mathcal{P}(G_1) \cong \mathcal{P}(G_2) \Rightarrow G_1 \cong G_2.$$

S obzirom na Lemu 3.1 *(a)*, na globalnu odredjenost klasa grafova presudno utiču svojstva jednoelementnih podskupova (ubuduće ćemo ih zvati **singltonima**). Tako, za većinu klasa koje razmatramo pokazaćemo da imaju SIP, što je jače od globalne odredjenosti. SIP za grafove definišemo kao i za algebarske strukture (videti Definiciju 1.5).

Definicija 3.3 *Za klasu grafova $\mathcal{C}$ kažemo da ima* **svojstvo jakog izomorfizma** *(SIP), ako za svaka dva grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ klase $\mathcal{C}$ važi sledeće: ako je $\varphi : \mathcal{P}_+(V_1) \to \mathcal{P}_+(V_2)$ izomorfizam grafova $\mathcal{P}(G_1)$ i $\mathcal{P}(G_2)$, tada je $\varphi(V_1') = V_2'$, gde su V_1' i V_2' skupovi singltona skupova V_1 i V_2, redom.*

Rezultati A. Drapala o monounarnim algebrama navedeni u odeljku 1.5 mogu se interpretirati na jeziku teorije grafova. Naime, svakoj monounarnoj algebri odgovara graf dobijen tako što $f(a) = b$ zamenimo sa $a \to b$. Klasu grafova dobijenu na taj način označićemo sa $\mathcal{U}$. Ona ima osobinu da za svaki graf G iz $\mathcal{U}$ i svaki čvor v grafa G važi $d^+(v) \leq 1$. Kako se stepena konstrukcija kod grafova (tj. relacijskih struktura) slaže sa stepenom konstrukcijom kod algebarskih struktura, Teoreme 1.18 i 1.19 možemo ovako preformulisati

Teorema 3.4 *Klasa konačnih grafova klase $\mathcal{U}$ je globalno odredjena.*

Teorema 3.5 *Klasa $\mathcal{U}$ nije globalno odredjena.*

U radu [1] autori posmatraju sledeću verziju globalne odredjenosti: ako je $\mathcal{C}$ neka klasa grafova, da li onda za sve $G_1 \in \mathcal{C}$ i svaki graf G_2 (ne obavezno iz $\mathcal{C}$) važi

$$\mathcal{P}(G_1) \cong \mathcal{P}(G_2) \Rightarrow G_1 \cong G_2?$$

Lema 3.3 *([1]) Za svaki graf G_1 sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) Svaki indukovani podgraf G grafa $\mathcal{P}(G_1)$ takav da je $\mathcal{P}(G) \cong \mathcal{P}(G_1)$, izomorfan je sa G_1.

(b) Za svaki graf G_2 iz $\mathcal{P}(G_1) \cong \mathcal{P}(G_2)$ sledi $G_1 \cong G_2$.

Dokaz. $(a) \Rightarrow (b)$
Neka je β izomorfizam grafova $\mathcal{P}(G_2)$ i $\mathcal{P}(G_1)$. Ako je G_2' podgraf grafa $\mathcal{P}(G_2)$ indukovan singltonima, tada je $\beta(G_2')$ indukovan podgraf grafa $\mathcal{P}(G_1)$, pri čemu je $\mathcal{P}(\beta(G_2')) \cong \mathcal{P}(G_2) \cong \mathcal{P}(G_1)$. No, tada, s obzirom na *(a)*, mora biti $G_2 \cong \beta(G_2') \cong G_1$.
$(b) \Rightarrow (a)$
Očigledno.
□

Posledica 3.1 *([1]) Neka $\mathcal{P}(G_1)$ ima tačno jedan indukovan podgraf G_1' takav da je $\mathcal{P}(G_1') \cong \mathcal{P}(G_1)$. Tada za svaki graf G_2 iz $\mathcal{P}(G_1) \cong \mathcal{P}(G_2)$ sledi $G_1 \cong G_2$.*

U [1] su pomenute neke klase grafova koje zadovoljavaju uslove prethodnih tvrdjenja.

Lema 3.4 *Neka konačan graf $G_1 = (V_1, E_1)$ zadovoljava jedan od sledećih uslova:*

(a) *G_1 je kompletan refleksivan graf;*
(b) *G_1 je kompletan graf;*
(c) *G_1 je kompletan bipartitan graf;*
(d) *G_1 je lanac dužine veće od 2.*

Tada za svaki graf G_2 iz $\mathcal{P}(G_1) \cong \mathcal{P}(G_2)$ sledi $G_1 \cong G_2$.

Dokaz.

(a) Sledi iz Leme 3.3 jer su svi indukovani podgrafovi stepenog grafa kompletni refleksivni grafovi.
(b) Neka je G indukovan podgraf grafa $\mathcal{P}(G_1)$ takav da je $\mathcal{P}(G) \cong \mathcal{P}(G_1)$. Grafovi G_1 i $\mathcal{P}(G_1)$ imaju tačno $|V_1|$ čvorova bez petlji i oni su po parovima susedni. Neka $G_1 \ncong G$. Tada u $\mathcal{P}(G)$ postoji čvor bez petlje $Y = \{Y_1, \dots, Y_s\}$, gde je $s > 1$. Ako je $\{\{x_1\}\}$ čvor bez petlje grafa $\mathcal{P}(G)$, tada je on susedan sa Y. No tada $\{x_1\} \notin Y$, jer bi u suprotnom čvor $\{\{x_1\}\}$ imao petlju u $\mathcal{P}(G)$. Prema tome, Y ne sadrži nijedan čvor bez petlje grafa G, odakle sledi da Y ima petlju u $\mathcal{P}(G)$. Ova kontradikcija pokazuje da mora biti $G_1 \cong G$.
(c) Neka je G indukovan podgraf grafa $\mathcal{P}(G_1)$ takav da je $\mathcal{P}(G) \cong \mathcal{P}(G_1)$. Lako se vidi da je $\mathcal{P}(G_1)$ unija jednog kompletnog bipartitnog grafa i kompletnog refleksivnog grafa. Kako ovaj graf ima tačno dve komponente, iz $\mathcal{P}(G) \cong \mathcal{P}(G_1)$ i dokaza Leme 3.1 *(d)*, sledi da je G povezan bipartitan graf. Pošto G nije refleksivan, zaključujemo da je G indukovan podgraf komponente grafa $\mathcal{P}(G_1)$ koja je kompletan bipartitan graf, a odatle sledi da je i sam graf G kompletan bipartitan graf. Sada se lako pokaže da je G izomorfan sa G_1.
(d) Videti dokaz globalne odredjenosti klase konačnih stabala iz odeljka 3.4.

3.4 Globalna odredjenost stabala

Stablo je prost neorijentisan povezan graf bez kontura. Poznato je da svako konačno stablo ima bar dva viseća čvora (visećim čvorovima neorijentisanog grafa nazivamo sve čvorove stepena 1, osim izolovanih čvorova sa petljom). U daljem tekstu sa $T(G)$ označavamo skup čvorova grafa G koji su susedni sa bar jednim visećim čvorom tog grafa.

Lema 3.5 *Neka je $G = (V, E)$ neorijentisan graf, X viseći čvor grafa $\mathcal{P}(G)$ i Y sused čvora X. Tada je svaki čvor iz Y susedan sa nekim visećim čvorom iz X, a svi čvorovi iz X susedni su samo sa čvorovima iz Y.*

Dokaz. Ako $y \in Y$ nije susedan sa sa visećim čvorom iz X, neka je X_1 skup svih suseda čvora y u skupu X i Z skup svih suseda čvorova iz X_1 u skupu $V \setminus \{y\}$. Tada je X susedan sa $(Y \setminus \{y\}) \cup Z$, pa X nije viseći čvor u $\mathcal{P}(G)$. Ako $x \in X$ i x je susedan sa $u \notin Y$, onda je X susedan i sa $Y \cup \{u\}$, pa opet nije viseći.
□

Posledica 3.2 *Neka je $G = (V, E)$ neorijentisan graf, $Y \in T(\mathcal{P}(G))$ i $y \in Y$. Tada $\{y\} \in T(\mathcal{P}(G))$.*

Dokaz. Na osnovu Leme 3.5 neki viseći čvor x grafa G je susedan sa y. No tada je $\{y\}$ susedan sa čvorom $\{x\}$ koji je viseći u $\mathcal{P}(G)$.
□

Lema 3.6 *Neka je $G = (V, E)$ konačan neorijentisan povezan graf sa bar 3 čvora i $Y = \{y_1, \ldots, y_r\} \in T(\mathcal{P}(G))$, $r \geq 2$. Tada je*

$$d(Y) > \max_{y_i \in Y} d(\{y_i\}).$$

Dokaz. Neka je y_s proizvoljan čvor iz Y i $d(y_s) = p$. Tada je $d(\{y_s\}) = 2^p - 1$. Neka je X skup visećih čvorova grafa G koji su susedni sa čvorovima iz $Y \setminus \{y_s\}$, a $Z = N(y_s)$. Za svako $Z' \subseteq Z$, $Z \neq \emptyset$, je $X \cup Z'$ susedan sa Y. Zato je $d(Y) \geq 2^p - 1$. Neka je $x_i \in X$ viseći čvor grafa G susedan sa y_i, $i \neq s$. Na osnovu Leme 3.5 jasno

je da čvorovi iz Y nisu viseći. To znači da je Y susedan sa $(X \cup N(y_i) \cup Z) \setminus \{x_i\}$, tj. postoje susedi čvora Y koji ne sadrže sve čvorove iz X. Odatle je $d(Y) \geq 2^p > d(\{y_s\})$.
□

Lema 3.7 *Neka je $G = (V,E)$ konačno stablo i $u \in V$. Ako je X čvor grafa $\mathcal{P}(G)$ koji je susedan sa $\{u\}$ i pri tome je $d(X) = 2^k - 1$ za neko $k \geq 2$, tada je X singlton. Ako je $d(X) = 1$ onda se medju visećim čvorovima grafa $\mathcal{P}(G)$ koji su susedi čvora $\{u\}$ nalazi singlton.*

Dokaz. Pretpostavimo da X nije singlton. Neka je $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$, $r \geq 2$, i $d(x_i) = k_i + 1$ za $i = 1, \ldots, r$. Pošto je G stablo, svaka dva različita čvora x_i i x_j iz X imaju tačno jednog zajedničkog suseda - to je čvor u. Ako $Y \in N(X)$ i $u \in Y$, tada $Y \setminus \{u\}$ može biti bilo koji podskup skupa $\bigcup\{N(x_i) \setminus \{u\} \mid x_i \in X\}$, a takvih ima $2^{k_1+\ldots+k_r}$. Ako $Y \in N(X)$ i $u \notin Y$, tada je $Y = U_1 \cup \ldots \cup U_r$, gde je U_i neprazan podskup skupa $N(x_i) \setminus \{u\}$, za sve $i = 1, \ldots, r$. Takvih skupova ima $\prod_{x_i \in X}(2^{k_i} - 1)$, pa je

$$d(X) = 2^{k_1+\ldots+k_r} + (2^{k_1} - 1)(2^{k_2} - 1)\ldots(2^{k_r} - 1).$$

Za $d(X) > 1$ bar jedan od brojeva k_i je različit od 0, i $d(X)$ ne može biti oblika $2^k - 1$. Ako je $d(X) = 1$ tada su viseći čvorovi $\{x_1\}, \ldots, \{x_r\}$ susedi čvora $\{u\}$.
□

Teorema 3.6 *Klasa konačnih stabala je globalno odredjena.*

Dokaz. Neka je $G = (V,E)$ stablo, $m = \min_{Y \in T(\mathcal{P}(G))} d(Y)$ i $M = \{Y \in T(\mathcal{P}(G)) \mid d(Y) = m\}$. Pretpostavimo da $X \in M$ i X nije singlton. Ako $x \in X$, na osnovu Leme 3.6 dobijamo $d(\{x\}) < d(X) = m$. Medjutim, s obzirom na Posledicu 3.2, $\{x\} \in T(\mathcal{P}(G))$, pa je dobijena nejednakost u kontradikciji sa izborom broja m. Odatle zaključujemo da su svi čvorovi iz M singltoni.
Neka je U maksimalan podskup skupa $\mathcal{P}(V)$ sa osobinama:

(1) $M \subseteq U$;
(2) $\mathcal{P}(G)_U$ je povezan;

(3) $(\forall Y \in U)\ d(Y) = 2^k - 1,$ za neko $k \geq 2$.

Na osnovu Leme 3.7 u U se nalaze samo singltoni, a pošto je G povezan graf, u U se nalaze svi singltoni osim onih koji odgovaraju visećim čvorovima. Što se tiče visećih čvorova, $\{u\} \in U$ susedan je sa visećim čvorom Y grafa $\mathcal{P}(G)$ ako i samo ako je Y skup nekih visećih čvorova grafa G koji su susedni sa u. Dakle, ako je $\{u\}$ susedan sa $2^k - 1$ visećih čvorova grafa $\mathcal{P}(G)$, onda je medju tim čvorovima tačno k singltona. Na taj način jednoznačno (do na izomorfizam) je odredjeno stablo G. Primetimo da je u dokazu u stvari opisan jedan algoritam kojim rekonstruišemo stablo na osnovu njegovog stepenog grafa.
□

3.5 Globalna odredjenost turnira

Od prostih orijentisanih grafova razmotrićemo klasu turnira. **Turnir** je orijentisan graf kod koga za svaka dva različita čvora u i v važi ili $u \to v$ ili $v \to u$. Od posebnog značaja za naša razmatranja su izvori i ponori. Čvor u grafa $G = (V, E)$ je **izvor** ako je $d^-(u) = 0$. Čvor u je **ponor** ako je $d^+(u) = 0$. Ako $x \in X$, kažemo da je x X-**izvor** (X-**ponor**) ako je $d^-_{G_X}(x) = 0$ ($d^+_{G_X}(x) = 0$).

Definicija 3.4 *Neka je $G = (V, E)$ turnir, $X \subseteq V$, $|X| > 1$. Za skup X kažemo da je* **loš** *ako važi sledeće: za svaki turnir G_1 i svaki izomorfizam φ stepenih grafova $\mathcal{P}(G)$ i $\mathcal{P}(G_1)$, $\varphi(X)$ nije singlton.*

Lema 3.8 *Neka je $G = (V, E)$ turnir i $X \subseteq V$. Ako u X ne postoji X-izvor ni X-ponor, tada je X loš skup. .*

Dokaz. X je loš skup jer $X \leftrightarrow X$.
□

Lema 3.9 *Neka je $G = (V, E)$ turnir sa n čvorova, x izvor (ponor) u G, $X \subseteq V$ tako da je $|X| > 1$ i $x \in X$. Tada je X loš skup.*

Dokaz. Neka je x izvor u G. Jasno je da je $d^-(X) = 0$. Što se tiče izlaznog stepena, ako $x \in Y$ tada $X \not\to Y$. Osim toga, ako $y \in X$ i $y \neq x$, onda X ne tuče $\{y\}$, pa je $d^+(X) < 2^{n-1} - 1$. No, ako je $d^-(\{u\}) = 0$ za neko $u \in V$, tada je $d^+(\{u\}) = 2^{n-1} - 1$, čime je tvrdjenje dokazano. Dokaz je sličan ako se u X nalazi ponor turnira G.
□

Lema 3.10 *Neka je $G = (V,E)$ turnir sa n čvorova, $X \subseteq V$, $|X| > 1$. Ako je $d^+(X) \geq 2^r$, $d^-(X) \geq 2^s$, pri čemu je $r+s \geq n-2$, tada je X loš skup.*

Dokaz. Za svaki element x turnira G važi da je $d^+(\{x\}) = 2^p - 1$, $d^-(\{x\}) = 2^q - 1$, $p+q = n-1$. Ako je $d^+(X) = 2^p - 1$ i $d^-(X) = 2^q - 1$, onda je $p > r$ i $q > s$. Medjutim, tada je $p+q \geq r+s+2 \geq n$.
□

Lema 3.11 *Neka je $G = (V,E)$ turnir sa n čvorova, $X \subseteq Y \subseteq V$, $|X| > 1$, $|Y| = n-1$ i $H = G_Y$. Ako je $d^+_{\mathcal{P}(H)}(X) \geq 2^r$, $d^-_{\mathcal{P}(H)}(X) \geq 2^s$, i $r+s \geq n-3$, onda je $d^+_{\mathcal{P}(G)}(X) \geq 2^{r_1}$, $d^-_{\mathcal{P}(G)}(X) \geq 2^{s_1}$ i $r_1+s_1 \geq n-2$.*

Dokaz. Neka je $\{z\} = V \setminus Y$. Ako postoji $x \in X$ tako da $z \to x$ i ako $W \to X$ u grafu $\mathcal{P}(H)$, onda $W \cup \{z\} \to X$ u grafu $\mathcal{P}(G)$ i $W \to X$ u $\mathcal{P}(G)$. To znači da je $d^-_{\mathcal{P}(G)}(X) \geq 2^{s+1}$. S obzirom na to da iz $X \to W$ u $\mathcal{P}(H)$ sledi $X \to W$ u $\mathcal{P}(G)$, imamo $d^+_{\mathcal{P}(G)}(X) \geq 2^r$, pa tvrdjenje važi jer je $r+s+1 \geq n-2$. Slično, ako postoji $x \in X$ tako da $x \to z$, lako se pokaže da je $d^+_{\mathcal{P}(G)}(X) \geq 2^{r+1}$ i $d^-_{\mathcal{P}(G)}(X) \geq 2^s$.
□

Lema 3.12 *Neka je $G = (V,E)$ turnir sa n čvorova, $X \subseteq Y \subseteq V$, $|X| > 1$, $|Y| = l$ i $H = G_Y$. Ako je $d^+_{\mathcal{P}(H)}(X) \geq 2^r$, $d^-_{\mathcal{P}(H)}(X) \geq 2^s$, i $r+s \geq l-2$, onda je $d^+_{\mathcal{P}(G)}(X) \geq 2^{r_1}$, $d^-_{\mathcal{P}(G)}(X) \geq 2^{s_1}$ i $r_1+s_1 \geq n-2$.*

Dokaz. Indukcijom po $n-l$, uz pomoć Leme 3.11.
□

Lema 3.13 *Neka je $G = (V,E)$ konačan turnir, $X \subseteq V$ tako da je $|X| > 1$, X sadrži X-izvor (X-ponor) ali ne i X-ponor (X-izvor). Tada je X loš skup.*

Dokaz. Neka je u X-izvor. Treba razmotriti dva slučaja.
1) Ako je u izvor u G tada je X loš skup na osnovu Leme 3.9.
2) Ako postoji $v \in V$ tako da $v \to u$ neka je $Y = X \cup \{v\}$ i $H = G_Y$. Procenimo ulazni stepen čvora X u $\mathcal{P}(H)$. Neka je $Z_1 \subseteq X \setminus \{u\}$ i $Z = Z_1 \cup \{u,v\}$. Kako u X ne postoji X-ponor, zaključujemo da $Z \to X$. Odatle je $d^-_{\mathcal{P}(H)}(X) \geq 2^{|X|-1}$. Za izlazni stepen čvora X važi $d^+_{\mathcal{P}(H)}(X) \geq 1$, jer u skupu X nema ponora. Tvrdjenje sada sledi na osnovu lema 3.12 i 3.10. Analogno se dokazuje dualno tvrdjenje.
□

Ostaje još da se vidi šta je sa skupovima koji imaju i izvor i ponor. Posebno ćemo razmotriti slučaj $|X| = 2$.

Lema 3.14 *Neka je $G = (V,E)$ konačan turnir sa bar 4 čvora i $X = \{u,v\} \subseteq V$. Tada je X loš skup.*

Dokaz. Neka $v \to u$. Ako je v izvor u G (ili u ponor u G), tada tvrdjenje sledi na osnovu Leme 3.9. U suprotnom, mogući su sledeći slučajevi.
1) Neka postoji $x \in V$ tako da $x \to v$ i $u \to x$. Pošto je $|V| \geq 4$, postoji čvor $y \in V$ različit od x,u,v. Neka je $Y = \{u,v,x,y\}$ i $H = G_Y$.
a) Ako $y \to v$ i $u \to y$ onda je $d^+_{\mathcal{P}(H)}(X) = 3$ i $d^-_{\mathcal{P}(H)}(X) = 3$. Tvrdjenje sledi na osnovu lema 3.12 i 3.10.
b) Ako $y \to u$ i $v \to y$ onda je opet $d^+_{\mathcal{P}(H)}(X) = 3$ i $d^-_{\mathcal{P}(H)}(X) = 3$.
c) Ako u i v tuku y, tada je $d^+_{\mathcal{P}(H)}(X) = 5$ i $d^-_{\mathcal{P}(H)}(X) = 1$, pa ponovo možemo primeniti leme 3.12 i 3.10.
d) Ako y tuče u i v, tada je $d^+_{\mathcal{P}(H)}(X) = 1$ i $d^-_{\mathcal{P}(H)}(X) = 5$, pa je zaključak isti kao i u prethodnim slučajevima.
2) Neka postoje $x,y \in V$ tako da x tuče u i v, a y je tučen od u i v i neka je $Y = \{u,v,x,y\}$, $H = G_Y$. Tada je $d^+_{\mathcal{P}(H)}(X) = 2$ i $d^-_{\mathcal{P}(H)}(X) = 2$, pa opet primenjujemo leme 3.12 i 3.10.
□

Lema 3.15 *Neka je $G = (V,E)$ konačan turnir, $X \subseteq V$, $|X| > 2$ i neka su u i v X-izvor i X-ponor, redom. Tada je X loš skup.*

Dokaz. Ako je u izvor u G (ili v ponor u G), tada tvrdjenje sledi na osnovu Leme 3.9. U suprotnom, treba razmotriti sledeće slučajeve.
1) Postoji $x \in V$ tako da $v \to x \to u$. Neka je $Y = X \cup \{x\}$ i $H = G_Y$. Ako je $\{x,v\} \subseteq Z \subseteq (X \setminus \{u\}) \cup \{x\}$, lako je videti da $X \to Z$. Odatle sledi $d^+_{\mathcal{P}(H)}(X) \geq 2^{|X|-2}$. Slično se pokazuje da je $d^-_{\mathcal{P}(H)}(X) \geq 2^{|X|-2}$. Kako je $2(|X|-2) \geq |Y|-2$, tvrdjenje sledi na osnovu lema 3.12 i 3.10.
2) Postoje $x,y \in V$ tako da x tuče u i v i y je tučen od u i v. Neka je $Y = X \cup \{x,y\}$ i $H = G_Y$.
a) Ako postoji $z \in X$ tako da $z \to x$, onda za sve Z za koje je $\{v,y\} \subseteq Z \subseteq Y \setminus \{u\}$ važi $X \to Z$. Odatle sledi $d^+_{\mathcal{P}(H)}(X) \geq 2^{|X|-1}$. Slično se pokazuje da je $d^-_{\mathcal{P}(H)}(X) \geq 2^{|X|-2}$. Kako je $2|X|-3 \geq |Y|-2$, tvrdjenje sledi na osnovu lema 3.12 i 3.10.
b) Ako postoji $z \in X$ tako da $y \to z$, onda slično kao u slučaju a) važi $d^+_{\mathcal{P}(H)}(X) \geq 2^{|X|-2}$ i $d^-_{\mathcal{P}(H)}(X) \geq 2^{|X|-1}$, pa ponovo primenjujemo leme 3.12 i 3.10.
c) Ako $x \to z$ i $z \to y$ za sve $z \in X$, onda je $d^+_{\mathcal{P}(H)}(X) \geq 2^{|X|-1}$ i $d^-_{\mathcal{P}(H)}(X) \geq 2^{|X|-1}$, pa izvodimo isti zaključak kao u dva prethodna slučaja.
□

Teorema 3.7 *Klasa konačnih turnira je globalno odredjena.*

Dokaz. Neka su G_1 i G_2 turniri sa bar 4 čvora. Na osnovu lema 3.8, 3.13, 3.14 i 3.15, svi čvorovi stepenih grafova ovih turnira osim singltona su loši skupovi, pa svaki izomorfizam grafova $\mathcal{P}(G_1)$ i $\mathcal{P}(G_2)$ slika singltone u singltone. Za svaki turnir G sa manje od 4 čvora lako je proveriti da $\mathcal{P}(G)$ ne može biti stepeni graf bilo kog grafa koji nije izomorfan sa G.
□

3.6 Globalna odredjenost refleksivnih orijentisanih grafova

Tvrdjenja koja slede odnose se na refleksivne orijentisane grafove i koristićemo ih pri odredjivanju nekih globalno odredjenih klasa orijentisanih grafova.

Lema 3.16 *Neka je $G = (V,E)$ refleksivan orijentisan graf, $X \subseteq V$ i neka postoje različiti $u, v \in X$, $w \in V$, takvi da $u \to w \to v$. Tada*

(a) ako $w \in X$ onda $X \leftrightarrow X \setminus \{w\}$;
(b) ako $w \notin X$ onda $X \leftrightarrow X \cup \{w\}$.

Dokaz. Treba dokazati da svaki element oba ova skupa tuče neki element drugog skupa i da je svaki element ova dva skupa tučen od nekog elementa drugog skupa.
(a) Ako $t \in X$ i $t \neq w$ tada $t \to t \in X \setminus \{w\}$. Ako je $t = w$ tada $t \to v \in X \setminus \{w\}$.
Ako $t \in X \setminus \{w\}$ tada $t \to t \in X$.
Ako $t \in X$ i $t \neq w$ tada $t \leftarrow t \in X \setminus \{w\}$. Ako je $t = w$ tada $t \leftarrow u \in X \setminus \{w\}$.
Ako $t \in X \setminus \{w\}$ tada $t \leftarrow t \in X$.
(b) Dokazuje se poput (a).
$\square$

Lema 3.17 *Neka je $G = (V,E)$ orijentisan graf i $x \in V$. Tada ne postoji $Y \subseteq V$ tako da je $Y \neq \{x\}$ i $\{x\} \leftrightarrow Y$.*

Dokaz. Neka $y \in Y$ i $y \neq x$. Ako $x \not\to y$ tada $\{x\} \not\to Y$. Ako $y \not\to x$ onda $Y \not\to \{x\}$.
$\square$

Lema 3.18 *Neka je $G = (V,E)$ refleksivan orijentisan graf i $X \subseteq V$. Tada postoji $Y \subseteq V$, $Y \neq X$, tako da $X \leftrightarrow Y$ ako i samo ako postoje različiti $u, v \in X$, $w \in V$, takvi da $u \to w \to v$.*

Dokaz. Jedan smer je direktna posledica Leme 3.16. Pretpostavimo sada da je $X \leftrightarrow Y$ za neko $Y \neq X$. Razlikujemo dva slučaja.
1) Ako $Y \not\subseteq X$ i $w \in Y \setminus X$, tada, pošto $X \to Y$, postoji $u \in X$ tako da $u \to w$. Iz

$Y \to X$ sledi da za neko $v \in X$ važi $w \to v$.
2) Ako je $Y \subseteq X$, tada uzmimo proizvoljno w iz $X \setminus Y$. Lako se vidi da iz $X \leftrightarrow Y$ sledi da postoje $u, v \in Y \subseteq X$ takvi da $u \to w \to v$.
□

Podskupove X takve da $X \leftrightarrow Y$ za neko $Y \neq X$, zvaćemo S-**skupovima** grafa G.

Lema 3.19 *Neka je $G = (V, E)$ refleksivan orijentisan graf, $X \subseteq V$, $u \in X$ i postoji $v \in V$ ($v \neq u$) tako da $u \to v$ ($v \to u$). Tada je $d^+(X) > 1$ ($d^-(X) > 1$).*

Dokaz. Ako $v \in X$ onda $X \to X \setminus \{u\}$ ($X \setminus \{u\} \to X$).
Ako $v \notin X$ onda $X \to X \cup \{v\}$ ($X \cup \{v\} \to X$).
Sada tvrdjenje važi zbog toga što je stepeni graf refleksivnog orijentisan grafa refleksivan graf.
□

Videli smo već da je klasa turnira globalno odredjena. Isto važi i za klasu refleksivnih turnira.

Lema 3.20 *Neka je $G = (V, E)$ refleksivan turnir sa bar tri čvora, $X \subseteq V$, $|X| \geq 3$. Tada postoji $Y \subseteq V$, $Y \neq X$, tako da $X \leftrightarrow Y$.*

Dokaz. Pošto je $|X| \geq 3$, postoje $u, v, w \in X$ tako da $u \to w \to v$. Tvrdjenje sada sledi na osnovu Leme 3.16.
□

Lema 3.21 *Neka je $G = (V, E)$ konačan refleksivan turnir sa bar tri čvora, $X = \{u, v\} \subseteq V$ i X nije S-skup grafa G. Tada je $d^+(X) \neq 2^k - 1$ za sve $k \in N$.*

Dokaz. Kako X nije S-skup zaključujemo da ne postoji $w \in V \setminus X$ takav da $u \to w \to v$ ili $v \to w \to u$. Stoga sve čvorove iz $V \setminus X$ možemo podeliti u dve klase - one koji tuku u i v (klasa A) i one koji su tučeni od u i v (klasa B). Neka je $|A| = m$, $|B| = p$. Tada, ako X tuče Y i $Y \nsubseteq X$, mora biti $Y \cap B \neq \emptyset$ i $Y \cap A = \emptyset$, a $Y \cap X$ može biti bilo koji podskup od X. Takvih skupova Y ima $(2^p - 1) \cdot 4$. Ako $X \to Y$, $Y \subseteq X$

i recimo $u \to v$, tada je $Y = \{v\}$ ili $Y = \{u,v\}$. Dakle $d^+(X) = (2^p - 1) \cdot 4 + 2$, tako da je

$$2^{p+2} - 1 > d^+(X) = 2^{p+2} - 2 > 2^{p+1} - 1.$$

□

Teorema 3.8 *Klasa konačnih refleksivnih turnira ima SIP.*

Dokaz. Pri proizvoljnom izomorfizmu stepenih grafova dva refleksivna turnira, skup sa više od dva elementa ne može se preslikati na singlton na osnovu lema 3.17 i 3.20. S-skup sa dva elementa ne može se preslikati na singlton na osnovu Leme 3.17. Ostali dvoelementni skupovi ne mogu se preslikati na singlton na osnovu Leme 3.21 i Leme 3.1 *(c)*.
□

Bipartitan turnir je orijentisan graf čiji se skup čvorova može podeliti u dve klase, A i B, tako da, ako su čvorovi x i y iz iste klase onda oni ne tuku jedan drugog, a ako su iz različitih klasa onda ili $x \to y$ ili $y \to x$. Ako uz to svaki čvor tuče samog sebe, onda se radi o refleksivnom bipartitnom turniru. Dokazaćemo da i ova klasa orijentisanih grafova ima SIP.

Lema 3.22 *Neka je $G = (V,E)$ konačan refleksivan bipartitan turnir sa klasama A i B i $X \subseteq A$ nije S-skup grafa G. Ako je $|X| > 1$, onda je $d^+(X) \neq 2^k - 1$ za sve $k \in N$ ili je $d^-(X) \neq 2^k - 1$ za sve $k \in N$.*

Dokaz. Kako X nije S-skup, prema Lemi 3.16 ne postoje $u,v \in X$, $w \in B$ takvi da $u \to w \to v$. Dakle, sve čvorove iz B možemo podeliti u dve klase - one koji tuku sve čvorove iz X (klasa B_1) i one koji su tučeni od svih čvorova iz X (klasa B_2). Neka je $|B_1| = m$, $|B_2| = p$. Tada, ako X tuče Y i $Y \neq X$, mora biti $Y \cap B_2 \neq \emptyset$, $Y \cap B_1 = \emptyset$ i $Y \cap (A \setminus X) = \emptyset$, a $Y \cap X$ može biti bilo koji podskup od X. Dakle $d^+(X) = (2^p - 1) \cdot 2^{|X|} + 1$. Na sličan način se pokazuje da je $d^-(X) = (2^m - 1) \cdot 2^{|X|} + 1$. Bar jedan od brojeva m,p je različit od nule. Ako je $m \neq 0$, tada je

$$2^{m+|X|} - 1 > d^-(X) > 2^{m+|X|} - 2^{m+|X|-1} = 2^{m+|X|-1}.$$

□

Lema 3.23 *Neka je $G = (V,E)$ konačan refleksivan bipartitan turnir sa klasama A i B i $X \subseteq V$ nije S-skup grafa G. Ako je $X \cap A \neq \emptyset$ i $X \cap B \neq \emptyset$, onda je $d^+(X) \neq 2^k - 1$ za sve $k \in N$.*

Dokaz. Neka je $X \cap A = A_1$, $X \cap B = B_1$. Pošto X nije S-skup, ili svi čvorovi iz A_1 tuku sve čvorove iz B_1 ili je situacija obrnuta. Pretpostavimo da su odgovarajuće grane orijentisane iz A_1 ka B_1. Dalje, neka je A_2 skup čvorova iz A koji su tučeni od svih čvorova iz B_1, a B_2 skup čvorova iz $B \setminus B_1$ koji su tučeni od svih čvorova iz A_1. Razlikujemo dva slučaja.
1) Ako je $A_2 \neq \emptyset$, neka je $C = X \cup A_2 \cup B_2$, i za svako $Y \subseteq C$ neka je $\overline{Y} = C \setminus Y$. Dokazaćemo da ako $X \not\to Y$, tada $X \to \overline{Y}$.

Jasno je da iz $B_1 \subseteq Y$ sledi $X \to Y$. Takodje, ako je $Y \cap B_1 = \emptyset$, onda je $B_1 \subseteq \overline{Y}$, pa $X \to \overline{Y}$. Dakle, treba razmotriti šta se dogadja ako je $Y \cap B_1 \neq \emptyset$ i $\overline{Y} \cap B_1 \neq \emptyset$. Ali tada, ako je $Y \cap A_2 \neq \emptyset$ onda $X \to Y$, a ako je $\overline{Y} \cap A_2 \neq \emptyset$ onda $X \to \overline{Y}$.

Ako $X \to Y$, tada očigledno mora biti $Y \subseteq C$. Pošto $X \to C$ i postoji $Y \subseteq C$ tako da $X \not\to Y$, dobijamo da važi

$$2^{|C|} - 1 > d^+(X) \geq 2^{|C|-1}.$$

2) Neka je $A_2 = \emptyset$. Tada iz $X \to Y$ sledi $B_1 \subseteq Y$, a $X \cap (A_1 \cup B_2)$ može biti bilo koji podskup skupa $A_1 \cup B_2$. Dakle $d^+(X) = 2^{|A_1|+|B_2|}$.
□

Teorema 3.9 *Klasa konačnih refleksivnih bipartitnih turnira ima SIP.*

Dokaz. Neka je $G = (V,E)$ refleksivan bipartitan turnir i $X \subseteq V$, $|X| > 1$. Ako je X S-skup, onda na osnovu Leme 3.17, nijednim izomorfizmom stepenih grafova X ne može da se preslika na singlton. Ako X nije S-skup, tada X ne može da se preslika na singlton zbog lema 3.22, 3.23 i 3.1 *(c)*.
□

Baza orijentisanog grafa je neorijentisani graf koji se dobija kada se odgovarajuća antisimetrična relacija dopuni do najmanje simetrične relacije koja je sadrži. **Orijentisanim stablom** zvaćemo orijentisan graf čija je baza stablo. Globalnu odredjenost klase refleksivnih orijentisanih stabala dokazujemo koristeći osnovnu ideju iz dokaza za klasu stabala. Ponovo će važnu ulogu imati viseći čvorovi, s tim što ovde visećim čvorovima zovemo one čvorove za koje je zbir ulaznog i izlaznog stepena 3.

Lema 3.24 *Neka je $G = (V,E)$ refleksivno orijentisano stablo i $x \in V$ viseći čvor. Tada $(d^+(\{x\}), d^-(\{x\}))$ može da bude $(1,3)$ ili $(3,1)$. Ako x nije viseći čvor, tada $(d^+(\{x\}), d^-(\{x\}))$ ne može da bude nijedan od parova $(1,3)$, $(3,1)$.*

Dokaz. Prema definiciji visećeg čvora, $(d^+(x), d^-(x))$ je $(2,1)$ ili $(1,2)$ ako i samo ako je x viseći čvor.
□

Lema 3.25 *Neka je $G = (V,E)$ refleksivno orijentisano stablo i $X \subseteq V$, $|X| > 1$. Tada $(d^+(X), d^-(X))$ ne može da bude nijedan od parova $(1,3)$, $(3,1)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $d^+(X) = 1$. Tada, na osnovu Leme 3.19, mora biti $d^+(x) = 1$ za sve $x \in X$, tj. nema grana izmedju različitih čvorova iz X. Ako $u, v \in X$, postoje ne obavezno različiti $w, z \in V \setminus X$, takvi da $w \to u$ i $z \to v$. Tada X tuku sledeći čvorovi grafa $\mathcal{P}(G)$: X, $X \cup \{w\}$, $(X \cup \{w\}) \setminus \{u\}$, $(X \cup \{z\}) \setminus \{v\}$. Odatle se vidi da je $d^+(X) > 3$. Analogno se dokazuje slučaj $d^-(X) = 1$.
□

Lema 3.26 *Neka je $G = (V,E)$ konačno refleksivno orijentisano stablo i $u \in V$. Ako je X čvor grafa $\mathcal{P}(G)$ takav da $\{u\} \to X$ ($X \to \{u\}$), i pri tome je $d^-(X) = 2^k - 1$ ($d^+(X) = 2^k - 1$) za neko $k \in N$, tada je X singlton.*

Dokaz. Dokazuje se analogno dokazu Leme 3.7. Naime, ako $\{u\} \to X$ i $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$, $r \geq 2$, onda je $I(x_i) \cap I(x_j) = \{u\}$ za svaka dva različita čvora $x_i, x_j \in X$. Neka je $d^-(x_i) = k_i + 1$, $i = 1, \ldots, r$. Razbijemo skup $I(X)$ na dve klase - u prvoj su skupovi koji sadrže u, a u drugoj oni koji ne sadrže u. Kao i u dokazu Leme 3.7, sada se pokaže da je u prvoj klasi $2^{k_1+\cdots+k_r}$ skupova, a u drugoj $\prod_{x_i \in X}(2^{k_i} - 1)$ skupova, pa je

$$d^-(X) = 2^{k_1+\cdots+k_r} + (2^{k_1} - 1)(2^{k_2} - 1)\ldots(2^{k_r} - 1).$$

Pri tome, k_i može biti 0 samo ako je $x_i = u$, pa $d^-(X)$ ne može biti $2^k - 1$ ni za jedan prirodan broj k.
□

Teorema 3.10 *Klasa konačnih refleksivnih orijentisanih stabala ima SIP.*

Dokaz. Dokazuje se slično kao Teorema 3.6. Ako je $G = (V,E)$ refleksivno orijentisano stablo, onda na osnovu lema 3.24 i 3.25 možemo da odredimo skup svih singltona koji odgovaraju visećim čvorovima (označimo ga sa M), a zatim na osnovu Leme 3.26 nadjemo sve preostale singltone. Naime, skup svih singltona U je maksimalni podskup skupa $\mathcal{P}(V)$ sa osobinama:

(1) $M \subseteq U$;
(2) Baza grafa $\mathcal{P}(G)_U$ je povezan neorijentisan graf;
(3) Za sve $Y \in U$ $d^+(Y) = 2^k - 1$, za neko $k \geq 2$ i $d^-(Y) = 2^l - 1$, za neko $l \geq 2$.

Naravno, tada je $G \cong \mathcal{P}(G)_U$.
□

Za orijentisan graf kažemo da je k-regularan ako je izlazni stepen svih čvorova tog orijentisanog grafa jednak k. Naravno, možemo regularnost definisati i dualno, preko ulaznih stepena, tako da sve što dokažemo za regularne grafove ima svoju dualnu verziju. Primetimo još da je kod refleksivnih orijentisanih grafova slučaj $k = 1$ neinteresantan (nema grana izmedju različitih čvorova), pa ćemo ubuduće smatrati da je $k \geq 2$.

Lema 3.27 *Neka je $G = (V,E)$ konačan k-regularan refleksivan orijentisan graf ($k \geq 2$), $X \subseteq V$, $|X| = r > 1$. Tada je $d^+(X) > 2^k - 1$.*

Dokaz. Tvrdjenje dokazujemo indukcijom po r. Za $r = 2$ neka je $X = \{u,v\}$. Pošto $u \in O(u)$, $v \in O(v)$ i ne može biti $u \leftrightarrow v$, zaključujemo da je $O(u) \neq O(v)$. Neka $w \in O(u) \setminus O(v)$. Tada X tuče sve čvorove $Y \cup \{w\}$ gde je Y neprazan podskup od $O(v)$, a takvih ima $2^k - 1$. Takodje, X tuče i $(O(u) \cup O(v)) \setminus \{w\}$ (jer je $k \geq 2$), pa je $d^+(X) > 2^k - 1$.

Neka je $r > 2$, $u \in X$, $B = \bigcup\{O(x) \mid x \in X\}$ i pretpostavimo da tvrdjenje važi za sve skupove sa manje od r elemenata. Ako X tuče sve čvorove koje tuče $X \setminus \{u\}$, onda tvrdjenje važi po induktivnoj pretpostavci. Ako postoji $Y \subseteq V$ tako da $X \setminus \{u\} \to Y$ i $X \not\to Y$, onda je $Y \subseteq B \setminus O(u)$. Tada $X \to Y \cup Z$ za sve neprazne $Z \subseteq O(u)$, a takvih ima $2^k - 1$. Osim toga, $X \to B \setminus \{y\}$ za proizvoljno $y \in Y$, pa je $d^+(X) > 2^k - 1$.
□

Teorema 3.11 *Neka je $k \geq 2$. Klasa konačnih k-regularnih orijentisanih grafova je globalno odredjena.*

Dokaz. Tvrdjenje sledi iz Leme 3.27, pošto je $d^+(\{v\}) = 2^k - 1$ za svaki čvor v k-regularnog orijentisanog grafa.
□

3.7 Turniri kao grupoidi

Pored uobičajenog pristupa da se grafovi posmatraju kao relacijske strukture, u literaturi postoji i pristup u kome se svakom grafu koji pripada nekoj klasi pridružuje algebra koja ga u potpunosti karakteriše. Tako, primećeno je (Hedrlín 1965, takodje Chvátal [10]) da svaki refleksivan turnir $G = (V,E)$ može biti transformisan u grupoid uvodjenjem multiplikativne operacije na V tako da je $xy = yx = x$ ako i samo ako $x \to y$. To nas dovodi do sledeće definicije

Definicija 3.5 Grupoid turnira $\mathcal{T} = \langle T, \cdot \rangle$ *je komutativan idempotentan grupoid takav da za sve $x, y \in T$ važi $x \cdot y \in \{x, y\}$. Umesto $x \cdot y$ pisaćemo xy. Ako je $xy = x$ reći ćemo da x "tuče" y.*

Jasno je da postoji uzajamno jednoznačna korespondencija izmedju klase svih refleksivnih turnira i klase grupoida turnira. U skladu s tim, kada god ne postoji opasnost od zabune, grupoide turnira zvaćemo jednostavno turnirima.

U literaturi su razmatrana razna pitanja u vezi sa ovim algebrama: mreže kongruencija turnira ([33]), automorfizmi turnira ([33]), problemi odlučivosti ([12]), jednakosna aksiomatizacija turnira ([25]). Pregled svih ovih istraživanja dat je u radu [13]. Mi ćemo na ovom mestu razmatrati problem globalne odredjenosti klase turnira. Ovo pitanje razlikuje se od istog problema za turnire kao relacijske strukture.

Algebru kompleksa (global) turnira $\mathcal{T}$ označavaćemo sa $\mathcal{P}(\mathcal{T})$. Pri tome podrazumevamo da je prazan skup isključen iz nosača ove algebre (nosač ćemo označavati sa $\mathcal{P}_+(T)$).

Lema 3.28 *Neka je $\mathcal{T} = \langle T, \cdot \rangle$ turnir i $|T| > 2$. Tada $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ nije turnir.*

Dokaz. Ako je $|T| > 2$, onda postoje $x, y, z \in T$ takvi da $xy = x$ i $yz = y$. Tada je $\{x, z\}\{y\} = \{x, y\}$.
□

Definicija 3.6 *Neka je $\mathcal{T} = \langle T, \cdot \rangle$ turnir i $x \in T$.* **Skor** *elementa x u oznaci $d^+(x)$ definišemo na sledeći način:*

$$d^+(x) = |\{y \in T \mid xy = x\}|.$$

Analogno, ako $X \in \mathcal{P}(T)$ tada je

$$d^+(X) = |\{Y \in \mathcal{P}(T) \mid XY = X\}|.$$

Primetimo da je skor elementa u grupoidu turnira jednak izlaznom stepenu tog elementa u odgovarajućem grafu.

Ako je $\mathcal{T}$ turnir, T' će služiti kao oznaka za skup jednoelementnih podskupova skupa T, a $\mathcal{T}'$ će označavati odgovarajući podturnir algebre $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ (koji je, naravno, izomorfna kopija turnira $\mathcal{T}$).

Lako je dokazati da važi sledeće tvrdjenje.

Lema 3.29 *Neka je $\mathcal{T} = \langle T, \cdot \rangle$ turnir i $x \in T$. Tada je*

$$d^+(\{x\}) = 2^{d^+(x)} - 1.$$

Jednoelementni skupovi u globalu turnira imaju "osobinu koja ih izdvaja" od ostalih elemenata globala. Na osnovu toga možemo dokazati globalnu odredjenost klase turnira.

Lema 3.30 *Neka je $\mathcal{T} = \langle T, \cdot \rangle$ turnir i $x \in T$. Tada ne postoje $X, Y \in \mathcal{P}(T) \setminus \{\{x\}\}$ takvi da je $XY = \{x\}$.*

Dokaz. Ako je $X, Y \neq \{x\}$, tada postoje $z, t \in T \setminus \{x\}$ takvi da $z \in X$, $t \in Y$. Medjutim, tada $zt \in XY \setminus \{x\}$.
□

Lema 3.31 *Neka je $\mathcal{T} = \langle T, \cdot \rangle$ turnir, $Z \subseteq T$ i $|Z| \geq 3$. Tada postoje $X, Y \in \mathcal{P}(T) \setminus \{Z\}$ takvi da je $XY = Z$.*

Dokaz. Iz $|Z| \geq 3$ sledi da postoje različiti $x, y \in Z$ sa osobinom da za neko $u \in Z \setminus \{x\}$ važi $xu = x$ i za neko $v \in Z \setminus \{y\}$ važi $yv = y$. Lako je pokazati da je $(Z \setminus \{x\})(Z \setminus \{y\}) = Z$.
□

Lema 3.32 *Neka je $\mathcal{T} = \langle T, \cdot \rangle$ turnir, $Z = \{x, y\} \subseteq T$, $d^+(x) > 1$ i $d^+(y) > 1$. Tada postoje $X, Y \in \mathcal{P}(T) \setminus \{Z\}$ takvi da je $XY = Z$.*

Dokaz. Neka je $xy = x$. Tada postoji $z \in T \setminus \{y\}$ tako da je $yz = y$. Odatle sledi $Z = \{x, z\}\{y\}$.
□

Lema 3.33 *Neka je $\mathcal{T} = \langle T, \cdot \rangle$ turnir, $Z = \{x, y\} \subseteq T$ i $d^+(y) = 1$. Tada je $d^+(Z) = 2$.*

Dokaz. Z tuče samo Z i $\{y\}$.
□

Sada možemo dokazati i najavljeno tvrdjenje.

Teorema 3.12 *Neka su $\mathcal{T}_1 = \langle T_1, \cdot \rangle$ i $\mathcal{T}_2 = \langle T_2, \cdot \rangle$ turniri i $\psi : \mathcal{P}_+(T_1) \to \mathcal{P}_+(T_2)$ izomorfizam globala ovih turnira. Tada je $\psi(T_1') = T_2'$.*

Dokaz. Izomorfizam ψ ne može slikati podskupove iz Lema 3.31 i 3.32 na elemente skupa T_2' zbog Leme 3.30. Podskupovi iz Leme 3.33 ne mogu se slikati na elemente iz T_2' zbog Leme 3.29. Time je u stvari dokazano da klasa turnira ima SIP.
□

Zaključili smo na početku da algebra kompleksa turnira nije turnir. Možemo postaviti sledeće pitanje: šta se dešava ako posmatramo samo "grafovski" deo algebre kompleksa, odnosno samo one parove X, Y za koje $XY \in \{X, Y\}$? Na ovaj način dobijamo jednu parcijalnu algebru, koja odgovara nekom (orijentisanom) grafu. Taj graf nije izomorfan grafu koji se dobija uobičajenom stepenom konstrukcijom (tj. stepenovanjem odgovarajuće relacije). Sada ćemo razmotriti globalnu odredjenost turnira u smislu ove konstrukcije. U nastavku posmatramo samo konačne turnire.

Definicija 3.7 *Neka je $\mathcal{T} = \langle T, \cdot \rangle$ turnir.* **Grafovski global** *turnira $\mathcal{T}$ je parcijalna algebra $\mathcal{P}_G(\mathcal{T}) = \langle \mathcal{P}_+(T), * \rangle$, gde je za proizvoljne $X, Y \in \mathcal{P}_+(T)$*

$$X * Y = \begin{cases} XY & \text{ako } XY \in \{X, Y\} \\ \text{nije definisano} & \text{inače} \end{cases}$$

Uvedimo još neke oznake. Ako $X \in \mathcal{P}_+(T)$, neka je

$$n(X) = |\{y \in T \setminus X \mid (\forall x \in X)\, xy = x\}| \ \text{ i } \ r(X) = |\{Y \subseteq X \mid XY = X\}|.$$

Lema 3.34 *Neka je $\mathcal{T} = \langle T, \cdot \rangle$ konačan turnir, $X \in \mathcal{P}_+(T)$ i $|X| \geq 2$. Tada je*

$$2^{|X|-1} \leq r(X) < 2^{|X|} - 1.$$

Dokaz. Ako $x, y \in X$ i $xy = x$ tada je $X\{x\} \neq X$, što dokazuje drugi deo nejednakosti. Za dokaz prvog dela nejednakosti, neka je $Y \subseteq X$ i $XY \neq X$. Tada postoji $x \in X \setminus Y$ tako da $xy = y$ za sve $y \in Y$. Medjutim, odatle sledi $X(X \setminus Y) = X$. Dakle, bar jedan od elemenata Y, $X \setminus Y$ je tučen od X, čime je tvrdjenje dokazano.
□

Lema 3.35 *Neka je $\mathcal{T} = \langle T, \cdot \rangle$ konačan turnir, $X \in \mathcal{P}_+(T)$ i $|X| \geq 2$. Tada je $d^+(X) \neq 2^k - 1$ za svako $k \in N$.*

Dokaz. Neka je $XY = X$ i $Y \not\subseteq X$. Tada se $Y \setminus X$ sastoji od (ne obavezno svih) elemenata iz T koje tuče svaki element iz x, dok $Y \cap X$ može biti bilo koji podskup skupa X. Odatle sledi

$$d^+(X) = r(X) + (2^{n(x)} - 1)2^{|X|}.$$

Na osnovu Leme 3.34 je

$$d^+(X) < 2^{|X|} - 1 + (2^{n(X)} - 1)2^{|X|} = 2^{n(X)+|X|} - 1.$$

Primenom prvog dela nejednakosti iz Leme 3.34 dobijamo

$$d^+(X) \geq 2^{|X|-1} + (2^{n(X)} - 1)2^{|X|} = 2^{n(X)+|X|} - 2^{|X|-1} \geq$$

$$2^{n(X)+|X|} - 2^{n(X)+|X|-1} = 2^{n(X)+|X|-1}.$$

Time je tvrdjenje dokazano.
□

Teorema 3.13 *Neka su* $\mathcal{T}_1 = \langle T_1, \cdot \rangle$ *i* $\mathcal{T}_2 = \langle T_2, \cdot \rangle$ *konačni turniri i* $\psi : \mathcal{P}_+(T_1) \to \mathcal{P}_+(T_2)$ *izomorfizam grafovskih globala ovih turnira. Tada je* $\psi(T_1') = T_2'$.

Dokaz. Direktno sledi iz Leme 3.35 i Leme 3.29.
□

Bibliografija

[1] Baumann U., R. Pöschel, I. Schmeichel, Power graphs, J. Inform. Process. Cybernet. EIK 30 (1994) 3, 135-142.

[2] Bleicher M.N., H. Schneider, R.L. Wilson, Permanence of identities of algebras, Algebra Universalis 3 (1973) 72-93.

[3] Bošnjak I., R. Madarász, Power algebras and generalized quotient algebras, Algebra Universalis 45 (2001) 179-189.

[4] Bošnjak I., R. Madarász, Good quotient relations and power algebras, Novi Sad Journal of Mathematics, Vol. 29, No. 2 (1999), 71-84, Proc. VIII Int. Conf. "Algebra and Logic" (Novi Sad, 1998).

[5] Bošnjak I., R. Madarász, On some classes of good quotient relations, Novi Sad Journal of Mathematics, u štampi.

[6] Bogdanović S., A note on power semigroups, Math. Japonica 28, No. 6 (1983) 725-727.

[7] Brink C., Power structures, Algebra Universalis 30 (1993) 177-216.

[8] Brink C., D.F. Jacobs, K. Nelte, R. Sekaran, Generalized quotient algebras and power algebras, manuscript.

[9] Burris S., H.P. Sankappanavar, A course in universal algebra, Springer-Verlag,New York, 1981.

[10] Chvátal V., On finite and count able rigid graphs and tournaments, Comment. Math. Univ. Carolinæ6 (1965), 429-438.

[11] Comer S.D.,Combinatorial aspects of relations, Algebra Universalis 18 (1984) 77-94.

[12] Crvenković S., I. Dolinka, P. Marković, Novi Sad Journal of Mathematics, Vol. 29, No. 2 (1999), 91-100, Proc. VIII Int. Conf. "Algebra and Logic" (Novi Sad, 1998).

[13] Crvenković S., I. Dolinka, P. Marković, A survey of algebra of tournaments, Novi Sad Journal of Mathematics, Vol. 29, No. 2 (1999), 95-130, Proc. VIII Int. Conf. "Algebra and Logic" (Novi Sad, 1998).

[14] Crvenković S., I. Dolinka, M. Vinčić, Involution semigroups are not globally determined, Semigroup Forum 62 (2001) 477-481.

[15] Czédli G., A Horn sentence in coalition lattices, Acta Math. Hungar. 72 (1-2) (1996) 99-104.

[16] Czédli G., G. Pollák, When do coalitions form a lattice?, Acta Sci. Math. (Szeged) 60 (1995) 197-206.

[17] Drapal A., Globals of unaryalgebras, Czech. Math. J. 35 (1985) 52-58.

[18] Gautam N.D., The validity of equations of complex algebras, Arch. Math. Logik Grundlag. 3 (1957) 117-124.

[19] Goldblatt R., Varieties of complex algebras, Annals of Pure and Applied Logic 44 (1989) 173-242.

[20] Gould M., J.A. Iskra, C. Tsinakis, Globally determined lattices and semilattices, Algebra Universalis 19 (1984) 137-141.

[21] Gould M., J.A. Iskra, Globally determined classes of semigroups, Semigroup Forum 28 (1984) 1-11.

[22] Grätzer G., H. Lakser, Identities for globals (complex algebras) of algebras, Colloq. Math. 54 (1988) 19-29.

[23] Grätzer G., S. Whitney, Infinitary varieties of structures closed under the formation of complex structures, Colloq. Math. 48 (1984) 1-5.

[24] Ježek J., A note on complex groupoids, Colloq. Math. Soc. János Bolyai (1982) 419-420.

[25] Ježek J., P. Marković, M. Maróti, R. McKenzie, Equations of tournaments are not finitely based, Discrete Math., u štampi.

[26] Jónsson B., A. Tarski, Boolean algebras with operators I,II, Amer.J.Math. 73 (1951) 891-939, 74 (1952) 127-167.

[27] Kobayashi Y., Semilattices are globally determined, Semigroup Forum Vol. 29 (1984) 217-222.

[28] Korczyński W., On a model of concurrent systems, Demonstratio Mathematica, Vol. XXX No 4 (1997) 809-828.

[29] Korczyński W., Petri nets and power graphs - a comparison of two concurrence-models, Demonstratio Mathematica, Vol. XXXI No 1 (1998) 179-192.

[30] Lukács E., Globals of G-algebras, Houston J. Math. 13 (1987) 241-244.

[31] Madarász R., S. Crvenković, Relacione algebre, Matematički institut, Beograd, 1992.

[32] Mogiljanskaja E.M., Non-isomorphic semigroups with isomorphic semigroups of subsets, Semigroup Forum, Vol. 6 (1973) 330-333.

[33] Müller V., J. Nešetřil, J. Pelant, Either tournaments or algebras?, Discrete Mathematics 11 (1975) 37-66.

[34] Petrović V., Teorija grafova, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, 1998.

[35] Putcha M.S., On the maximal semilattice decomposition of the power semigroup of a semigroup, Semigroup Forum, Vol. 15 (1978) 263-267.

[36] Ratschek H., Universal inclusion structures, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai 29. Universal Algebra, Esztergom (Hungary), 1977.

[37] Shafaat A., On varieties closed under the construction of power algebras, Bull. Austral. Math. Soc. 11 (1974) 213-218.

[38] Shafaat A., Remarks on special homomorphic relations, Period. Math. Hungar. 6 (1975) 255-265.

[39] Shafaat A., Homomorphisms, homomorphic relations and power algebras, Period. Math. Hungar. 11 (1980) 89-94.

[40] Szendrei Á., The operation ISKP on classes of algebras, Algebra Universalis 6 (1976) 349-353.

[41] Tamura T., Power semigroups of rectangular groups, Math. Japon. 29 (1984) 671-678.

[42] Tamura T., On the recent results in the study of power semigroups, Semigroups and their applications 1987) 191-200.

[43] Tamura T., J. Shafer, Power semigroups, Math. Japon. 12 (1967) 25-32.

[44] Trnkova V., On a representation of commutative semigroups, Semigroup Forum 10 (1975) 203-214.

[45] Vaš L., R.S. Madarász, A note about multi-algebras, power algebras and identities, IX Conference on Applied Mathematics, D.Herceg, Lj.Cvetković, eds.,Institute of Mathematics, Novi Sad, 1995 (147-153)

[46] Vinčić M., Global determinism of *-bands, Proc. Int. Conf. ''Filomat 2001'', a special issue of Filomat (Niš), u štampi.

[47] Whitney S., Théories linéaries, Ph.D. thesis, Université Laval, Québec, 1977.

[48] Winskel G., On powerdomains and modality, Theoret. Comp. Sci. 36 (1985) 127-137.

Biografija

Ivica Bošnjak je rodjen 1963 godine u Sremskoj Mitrovici, gde je završio osnovnu i srednju školu.Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, odsek za matematiku, je upisao 1982. godine. Fakultet je završio 1987. godine sa prosečnom ocenom 9,25.

Od septembra 1988. radi kao asistent na Institutu za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu. Poslediplomske studije upisao je u zimskom semestru školske 1987/88. godine na Odseku za matematiku, smer algebra i matematička logika. Ispite na poslediplomskim studijama položio je sa prosečnom ocenom 10. Magistarski rad pod nazivom "Kombinatorni algoritmi za otkrivanje neispravnosti" odbranio je 28. oktobra 1994. Autor je ili koautor 9 naučnih radova.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: (RBR):

Identifikacioni broj: (IBR):

Tip dokumentacije: (TD): Monografska dokumentacija

Tip zapisa: (TZ): Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada: (VR): Doktorska disertacija

Autor: (AU): mr Ivica Bošnjak

Mentor: (MN): dr Rozália Sz. Madarász

Naslov rada: (NR): O algebrama kompleksa

Jezik publikacije: (JP): srpski (latinica)

Jezik izvoda: (JI): srpski, odn. engleski

Zemlja publikovanja: (ZP): SR Jugoslavija

Uže geografsko područje: (UGP): Vojvodina

Godina: (GO): 2002

Izdavač: (IZ): Autorski reprint

Mesto i adresa: (MA): Novi Sad, Danila Kiša 27

Fizički opis rada: (FO): 3/118/46/0/1/0/0

Naučna oblast: (NO): Matematika

Naučna disciplina: (ND): Univerzalna algebra

Predmetna odrednica/Ključne reči: (PO): Algebre kompleksa, dobre faktor relacije, globalna odredjenost, stepeni grafovi

UDK:

Čuva se (ČU): U biblioteci Instituta za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Važna napomena: (VN):

Izvod: (IZ): Ovaj rad se bavi algebrama kompleksa i stepenim konstukcijama uopšte. Prvo poglavlje sadrži pregled poznatih rezultata iz ove oblasti. U drugom poglavlju razmatrani su neki univerzalno-algebarski problemi vezani za algebre kompleksa, koji su pokrenuti u radovima C. Brinka. Treće poglavlje sadrži rezultate o stepenim grafovima, sa posebnim osvrtom na globalnu odredjenost grafova.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: (DP): 15. septembra 1999.

Datum odbrane: (DO):

Članovi komisije: (KO):

Predsednik: dr Siniša Crvenković redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Rozália Sz. Madarász redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Zoran Stojaković Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: (ANO):

Identification number: (INO):

Document type: (DT): Monographic documentation

Type of record: (TR): Textual printed matter

Contents code: (CC): Ph.D. thesis

Author: (AU): Ivica Bošnjak, M.Sc.

Mentor: (MN): Rozália Sz. Madarász Ph.D.

Title: (TI): O algebrama kompleksa

Language of text: (LT): Serbian (latin)

Language of abstract: (LA): Serbian and English

Country of publication: (CP): FR Yugoslavia

Locality of publication: (LP): Vojvodina

Publication year: (PY): 2002.

Publisher: (PU): Author's reprint

Publ. place: (PP): Novi Sad, Danila Kiša 27

Physical description: (PD): 3/118/46/0/1/0/0

Scientific field: (SF): Mathematics

Scientific discipline: (SD): Universal algebra

Subject/Key words: (SKW): complex algebras, good quotient relations, globally determined classes, power graphs

UC:

Holding data: (HD): The Library of the Institute of Mathematics, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad

Note: (N):

Abstract: (AB): The thesis deals with power algebras and power constructions in general. The first chapter contains the most important known results from this field. In Chapter 2 some universal-algebraic problems concerning power algebras are considered. Chapter 3 is devoted to the investigation of power graphs. The main attention is focused on the problem of global determinism of graphs.

Accepted by the Scientific Board on (ASb): September 15, 1999.

Defended: (DE):

Thesis defend board: (DB):

President: dr Siniša Crvenković full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: dr Rozália Sz. Madarász, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, advisor

Member: dr Zoran Stojaković, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad,